# 補足２　Maxwell-Boltzmann分布から揺らぎの平均速度の導出

$$\boxed{p(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right)v^2}$$

$p(v)dv$ は速度が $v \to v + dv$ の範囲にある粒子の割合を示している。

全部でN個の粒子があるとしよう。平均速度はすべての粒子の速度を足して、Nで割ればよい。

$v \to v + dv$ の範囲の粒子の数： $Np(v)dv$

この範囲の速度を全部足すと $vNp(v)dv$

ゼロから無限大までの速度の粒子を全部足すと $\int_0^\infty vNp(v)dv$

Nで割って平均速度を得る $\int_0^\infty vp(v)dv$

平均速度 $v_a = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right)v^3 dv$ 　上と同様に $\frac{mv^2}{2k_B T} = v'^2$ と変数変換する。

$$v_a = 4\left(\frac{\pi m}{2k_B T}\right)^{-1/2}\int_0^\infty v'^3\exp(-v'^2)dv' = 4\left(\frac{\pi m}{2k_B T}\right)^{-1/2}\times\frac{1}{2}$$

$$\boxed{v_a = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}}$$

ここの積分過程

$$\int_0^\infty v'^3\exp(-v'^2)dv' = \left[\left(\frac{-v'^2}{2}\right)\exp(-v'^2)\right]_0^\infty + \int_0^\infty v'\exp(-v'^2)dv'$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\exp(-v'^2)\right]_0^\infty = \frac{1}{2}$$

部分積分を適用

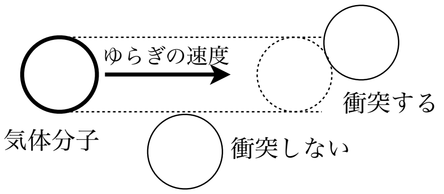
# 補足２’　平均自由行程の考え方（教科書11ページ）

熱活性化過程では，粒子 (気体分子等) は熱エネルギーをもって運動しており，単純に考えれば，進んで衝突して方向を変えて，進んで衝突して方向を変えて・・・を繰り返して，結局粒子全体の移動（風など）がなければ，一定の位置でふらふらと**ゆらいでいる**ように見える（コロイドのブラウン運動のような感じ）。　これが**熱活性化過程**における**ゆらぎ**！

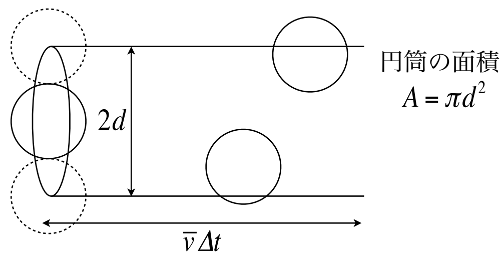
ではそのゆらぎの速度はというと，Maxwell-Boltzmann分布に従えば，上で導出した速度であり，結構速い！

300K で酸素分子で　445m/s (1603km/h)　　音速より速い。

この速度で動いているとして，だいたいどれくらいで衝突するのか・・・　　それが平均自由行程




つまり次のモデルで
考えれば良い。
直径２dの円筒内に
他の分子がどれだけ
あるのか？




ある時間Δtで粒子が動く距離は　$\bar{v}\Delta t$

その際，衝突する可能性のある領域の体積は　$\bar{v}\Delta t \times A = \pi d^2\bar{v}\Delta t$

粒子密度（n=(粒子の数)÷(体積)）を用いて衝突する可能性のある粒子の数を表すと $\pi nd^2\bar{v}\Delta t$

Δtの行程を粒子の数で割れば，次に衝突するまでの距離　平均自由行程　が求められる。 $\ell = \frac{\bar{v}\Delta t}{\pi nd^2\bar{v}\Delta t} = \frac{1}{\pi nd^2}$

進行方向のゆらぎを考える等厳密に取り扱うと $\boxed{\ell = \frac{1}{\sqrt{2}\pi nd^2}}$