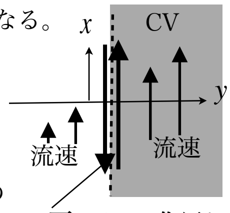
補足７　Control Volumeに作用する粘性せん断力（粘性まさつ力）　力積で考える

図の矢印は面の方向によって決まるせん断力の方向。

例えば　yの面で速度勾配が正ならば力積は負，運動量移動は負となる。yの面の方向は正なので力の正の方向（矢印の方向）は xの正の方向。 yの面に作用する粘性せん断力は負となる。

速度勾配が正ということはyの面には図のようにxと逆方向の力が作用している。



面を挟んで作用反作用のせん断力が作用する。

yの面でCVに作用しているのは負の力

ニュートンの式

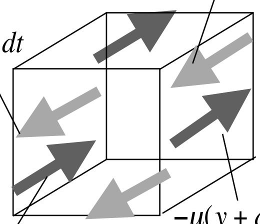
$$-\mu(x)\frac{\partial v_x}{\partial x}\bigg|_x \; dydz\; dt$$

せん断力　面積　時間

力積

$$-\mu(z+dz)\frac{\partial v_x}{\partial z}\bigg|_{z+dz} \; dxdy\; dt$$

$$-\mu(y)\frac{\partial v_x}{\partial y}\bigg|_y \; dxdz\; dt$$



ここでの→は面の向きの正負から考えた力の正の向きを示している

$$-\mu(y+dy)\frac{\partial v_x}{\partial y}\bigg|_{y+dy} \; dxdz\; dt$$

$$-\mu(x+dx)\frac{\partial v_x}{\partial x}\bigg|_{x+dx} \; dydz\; dt$$

$$-\mu(z)\frac{\partial v_x}{\partial z}\bigg|_z \; dxdy\; dt$$

せん断力の力の方向に注意！

材料力学や流体力学において，また一般的な場合でもこのような閉じた空間を考えた場合、その表面の方向というのは，空間から外向きとなっている。しかし，移動速度論では，上記のように「ー」の符号を付けているので，面の正の方向を空間に対して内向きとする。

x方向に作用する力を考えた場合、

x+dxの面は面の方向がマイナス(-x方向)なので， $-\mu(x+dx)\frac{\partial v_x}{\partial x}\Big|_{x+dx} dydz$ がマイナスの方向に作用していると考える。すなわち，+xの方向に $\mu(x+dx)\frac{\partial v_x}{\partial x}\Big|_{x+dx} dydz$ が作用していることになる。

収支式では粘性力が作用すると考えて

すなわち　(粘性力)×dtの力積で運動量が移動すると考えて

時間 t におけるCV内のx方向の運動量　$\rho(t)dxdydz\, v_x(t)$

＋dt時間に対流によってCV内に入るx方向の運動量

− dt時間に対流によってCV内から出るx方向の運動量

$$\left.\begin{aligned}
&\mu(x+dx)\frac{\partial v_x}{\partial x}\bigg|_{x+dx} dydz\; dt-\mu(x)\frac{\partial v_x}{\partial x}\bigg|_x dydz\; dt\\
&\mu(y+dy)\frac{\partial v_x}{\partial x}\bigg|_{y+dy} dydz\; dt-\mu(y)\frac{\partial v_x}{\partial x}\bigg|_y dydz\; dt\\
&\mu(y+dy)\frac{\partial v_x}{\partial x}\bigg|_{y+dy} dydz\; dt-\mu(y)\frac{\partial v_x}{\partial x}\bigg|_y dydz\; dt
\end{aligned}\right\}$$

＋dt時間にCVに作用する
x方向の粘性力の力積

＋dt時間にCVに作用するx方向のその他の力の力積

＝時間 t＋dt におけるCV内のx方向の運動量

$\rho(t+dt)dxdydz\, v_x(t+dt)$

となり，Taylor展開を利用して

$$\frac{\partial\left(\mu\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)}{\partial x}dxdydz\; dt+\frac{\partial\left(\mu\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)}{\partial y}dxdydz\; dt+\frac{\partial\left(\mu\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)}{\partial z}dxdydz\; dt$$

となる。ここで，粘度（粘性係数）が均一（位置によって変化しない）と考えて

$$\mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}dxdydz\; dt+\mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}dxdydz\; dt+\mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}dxdydz\; dt$$