問題９　円筒座標の連続の式　CVに対する 質量 の収支

CVの６つの面それぞれにdt時間に出入りする 質量 を表す
密度 ρ は均一でないとする

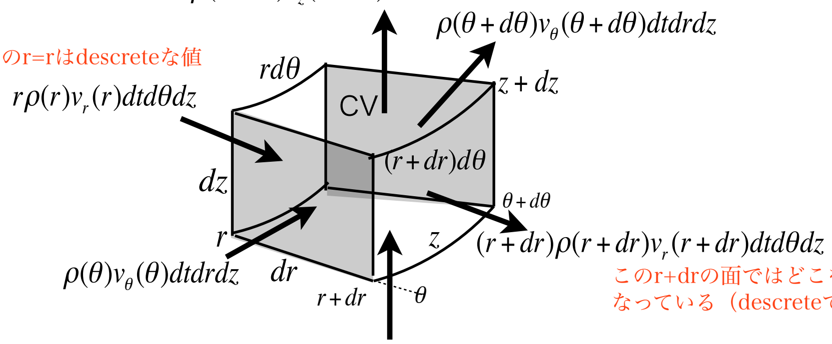
ここの ρ は $\rho(z+dz)$

$v_z(z+dz)dt\ rd\theta dr$ (体積) $\times\rho$

$\longrightarrow r\rho(z+dz)v_z(z+dz)dtdrd\theta$

dt時間にこの面を通過する体積はこの有限のサイズのCVを見ている限り，vz(z+dz)dt rd θ dr ではないように見える。しかしCVは無限小であり，体積はこれで正確なものとなっている。

rの面でのr=rはdescreteな値



このr+drの面ではどこをとっても r=r+dr であり，rの値は r=r と異なっている（descreteである）。よって面積は(r+dr)d θ dzとなる。

この微小要素のzの面では，r=r〜r+dr となっており，rの値はその間のどこをとっても良い。それならば r=r とすればよい。z+dz の面でも同じである。

ちょっと検証しよう

d θ を用いて面積を表現すると $\left\{\pi(r+dr)^2-\pi r^2\right\}\dfrac{d\theta}{2\pi}=\dfrac{(r^2+2rdr+dr^2-r^2)}{2}d\theta=\left(rdr+\cancel{\dfrac{dr^2}{2}}\right)d\theta$

dr² はdrの項に比べて高次の微少量なので，無限小を考えた場合に，drのみを残せば良い

よって面積は $rdrd\theta$ と表現すれば良い

dt時間でのCVに対する質量の収支を考える

最初(t=t)のCVの質量　$r\rho(t)drd\theta dz$　ここではまず　密度 ρ は一定でない　と考えておく

(r方向の出入り)　$+r\rho(r)v_r(r)dtd\theta dz\ -\ (r+dr)\rho(r+dr)v_r(r+dr)dtd\theta dz$

(θ 方向の出入り)　$+\rho(\theta)v_\theta(\theta)dtdrdz\ -\ \rho(\theta+d\theta)v_\theta(\theta+d\theta)dtdrdz$

(z方向の出入り)　$+r\rho(z)v_z(z)dtdrd\theta\ -\ r\rho(z+dz)v_z(z+dz)dtdrd\theta$

これらの値はt〜t+dtまで連続的に変化する時間での値なので，t=t での値を代表値とする

dt時間経過後(t=t+dt) のCVの質量　$=\ r\rho(t+dt)drd\theta dz$

時間に関しては面とかを考えることはできないが，時間t に着目する場合はtとt+dtでの値は離散的であると考える

それぞれの微小量に対してテーラー展開を適用する

(t に関して)　$\rho(t+dt)=\rho(t)+\left.\dfrac{\partial\rho}{\partial t}\right|_t dt$

(rに関して)　$(r+dr)\rho(r+dr)v_r(r+dr)=r\rho(r)v_r(r)+\left.\dfrac{\partial(r\rho v_r)}{\partial r}\right|_r dr$

(θ に関して)　$\rho(\theta+d\theta)v_\theta(\theta+d\theta)=\rho(\theta)v_\theta(\theta)+\left.\dfrac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial\theta}\right|_\theta d\theta$

(zに関して)　$\rho(z+dz)v_z(z+dz)=\rho(z)v_z(z)+\left.\dfrac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right|_z dz$

収支式に代入して
同じ項を相殺する。

$$
\begin{aligned}
&\cancel{r\rho(t)drd\theta dz}\\
&+\cancel{r\rho(r)v_r(r)dtd\theta dz}-\left(\cancel{r\rho(r)v_r(r)}+\left.\frac{\partial(r\rho v_r)}{\partial r}\right|_r dr\right)dtd\theta dz\\
&+\cancel{\rho(\theta)v_\theta(\theta)dtdrdz}-\left(\cancel{\rho(\theta)v_\theta(\theta)}+\left.\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial\theta}\right|_\theta d\theta\right)dtdrdz\\
&+\cancel{r\rho(z)v_z(z)dtdrd\theta}-r\left(\cancel{\rho(z)v_z(z)}+\left.\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right|_z dz\right)dtdrd\theta\\
&=r\left(\cancel{\rho(t)}+\left.\frac{\partial\rho}{\partial t}\right|_t dt\right)drd\theta dz
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow\ -\left.\frac{\partial(r\rho v_r)}{\partial r}\right|_r drdtd\theta dz-\left.\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial\theta}\right|_\theta d\theta dtdrdz-r\left.\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right|_z dzdtdrd\theta=r\left.\frac{\partial\rho}{\partial t}\right|_t dtdrd\theta dz
$$

それぞれの微分係数の指定位置，r, θ , z は一般性があるので位置をことわる必要がないとする。

CVの体積 $rdrd\theta dz$ で割る $\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(r\rho v_r)}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial\theta}+\dfrac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0}$　円筒座標での連続の式

密度が一定とすると $\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rv_r)}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\dfrac{\partial v_z}{\partial z}=0}$