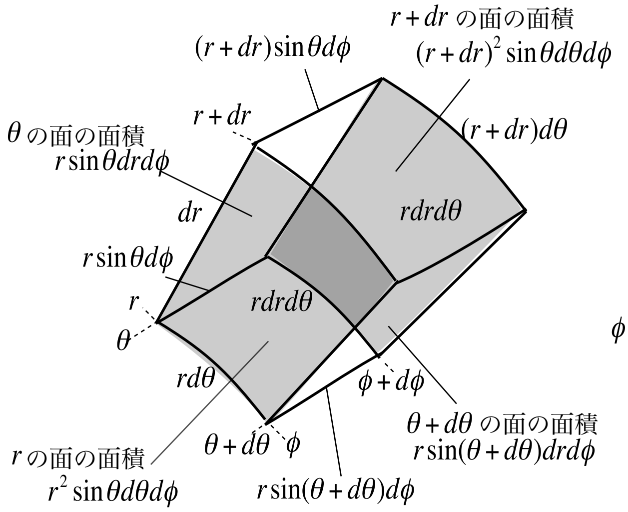
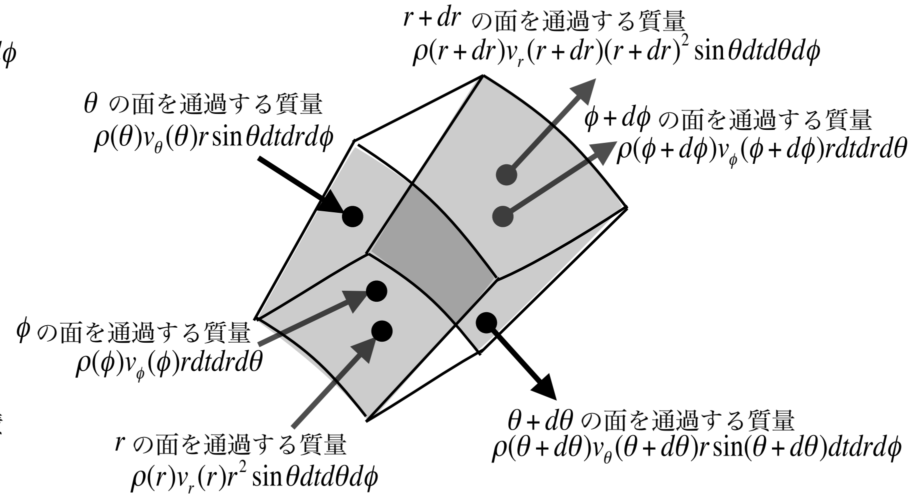
問題10　球座標の連続の式

球座標のCV

各面の面積を確認しよう



CVに対して６つの方向の→を描き，その量を数式で表現する



dt時間でのCVに対する質量の収支を考える

ここではまず　密度は一定でない　と考えておく

（CVの体積： $r^2\sin\theta drd\theta d\phi$ ）

(最初(t=t)のCVの質量)　$\rho(t)r^2\sin\theta drd\theta d\phi$

（ｒ方向の出入り）　$+\ \rho(r)v_r(r)r^2\sin\theta dtd\theta d\phi \ -\ \rho(r+dr)v_r(r+dr)(r+dr)^2\sin\theta dtd\theta d\phi$

（θ方向の出入り）　$+\ \rho(\theta)v_\theta(\theta)\sin\theta rdtdrd\phi \ -\ \rho(\theta+d\theta)v_\theta(\theta+d\theta)\sin(\theta+d\theta)rdtdrd\phi$

（φ方向の出入り）　$+\ \rho(\phi)v_\phi(\phi)rdtdrd\theta \ -\ \rho(\phi+d\phi)v_\phi(\phi+d\phi)rdtdrd\theta$

(dt時間経過後(t=t+dt)の質量)　$=\ \rho(t+dt)r^2\sin\theta drd\theta d\phi$

それぞれの微小量に対してテーラー展開を適用する

（ｔに関して）　$\rho(t+dt)=\rho(t)+\dfrac{\partial\rho}{\partial t}dt$

（θに関して）　$\rho(\theta+d\theta)v_\theta(\theta+d\theta)\sin(\theta+d\theta)=\rho(\theta)v_\theta(\theta)\sin\theta+\dfrac{\partial(\rho v_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}d\theta$

（ｒに関して）　$\rho(r+dr)v_r(r+dr)(r+dr)^2=\rho(r)v_r(r)r^2+\dfrac{\partial(\rho v_r r^2)}{\partial r}dr$

（φに関して）　$\rho(\phi+d\phi)v_\phi(\phi+d\phi)=\rho(\phi)v_\phi(\phi)+\dfrac{\partial(\rho v_\phi)}{\partial\phi}d\phi$

収支式に代入して同じ項を消去する。

$$
\begin{aligned}
&\rho(t)r^2\sin\theta drd\theta d\phi\\
&+\ \rho(r)v_r(r)r^2\sin\theta dtd\theta d\phi \ -\left(\rho(r)v_r(r)r^2+\frac{\partial(\rho v_r r^2)}{\partial r}dr\right)\sin\theta dtd\theta d\phi\\
&+\ \rho(\theta)v_\theta(\theta)\sin\theta rdtdrd\phi \ -\left(\rho(\theta)v_\theta(\theta)\sin\theta+\frac{\partial(\rho v_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}d\theta\right)rdtdrd\phi\\
&+\ \rho(\phi)v_\phi(\phi)rdtdrd\theta \ -\left(\rho(\phi)v_\phi(\phi)+\frac{\partial(\rho v_\phi)}{\partial\phi}d\phi\right)rdtdrd\theta\\
&=\left(\rho(t)+\frac{\partial\rho}{\partial t}dt\right)r^2\sin\theta drd\theta d\phi
\end{aligned}
$$

式を整理する　$-\dfrac{\partial(\rho v_r r^2)}{\partial r}dr\sin\theta dtd\theta d\phi-\dfrac{\partial(\rho v_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}d\theta rdtdrd\phi-\dfrac{\partial(\rho v_\phi)}{\partial\phi}d\phi rdtdrd\theta=\dfrac{\partial\rho}{\partial t}dtr^2\sin\theta drd\theta d\phi$

$r^2\sin\theta drd\theta d\phi dt$ で両辺を割る　$-\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(\rho v_r r^2)}{\partial r}-\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial(\rho v_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}-\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial(\rho v_\phi)}{\partial\phi}=\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$

移項して整理して球座標の連続の式を得る

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial(\rho r^2 v_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\rho v_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\rho v_\phi)}{\partial\phi}=0$$

密度が一定とすると

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(v_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}=0$$