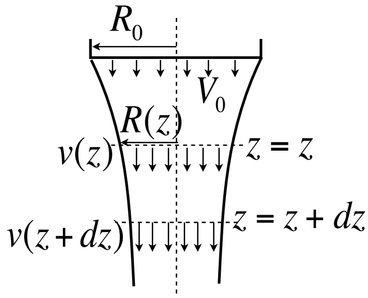
問題13　少し複雑な系で収支を考えよう。連続の式も活用する



水流の流速をvとする。vはzの面（断面）内で均一とする。
は重力により増加し，自由落下の関係より次式で表現される。

$$v(z)^2 - V_0{}^2 = 2gz \quad \rightarrow \quad v(z) = \sqrt{2gz + V_0{}^2} \quad ①$$

zとz＋dzの間の微小領域に対して体積の収支を考える。

$$\pi R(z)^2 v(z) - \pi R(z+dz)^2 v(z+dz) = 0$$

水がこの要素内で出現も消滅もしていない

$$v(z+dz)R(z+dz)^2 = \left(v(z) + \frac{dv}{dz}dz\right)\left(R(z)^2 + \frac{dR^2}{dz}dz\right)$$

最後の項は高次の微小量なので無視できる。最初の項（０次の項）は収支式でキャンセルされるので、この式は1次の微小量の式となる。

$$= v(z)R(z)^2 + R(z)^2\frac{dv}{dz}dz + v(z)\frac{dR^2}{dz}dz + \frac{dv}{dz}\frac{dR^2}{dz}dz^2 = v(z)R(z)^2 + R(z)^2\frac{dv}{dz}dz + v(z)\frac{dR^2}{dz}dz$$

$\dfrac{d(R^2v)}{dz} = 0$ より　$R(z)^2 v(z) = A$　z=0での値より　$A = R_0{}^2 v_0$　　よって

$$\boxed{R(z) = \frac{R_0\sqrt{V_0}}{\left(2gz + V_0{}^2\right)^{1/4}}}$$

水流の表面の流速は表面に 平行 なので，明らかに流速は 半径r 方向の成分も持っている。
それを導くためには，連続の式を用いる。

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

円筒座標、定常

θ 方向（周方向）の微分は軸対称なのでゼロ！

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

v は仮定によりzのみの関数で

$$\frac{dv_z}{dz} = \frac{g}{\sqrt{2gz + V_0^2}}$$

上の式に代入

$$\frac{d(rv_r)}{dr} = \frac{-g}{\sqrt{2gz + V_0^2}}r$$

積分して

$$rv_r = \frac{-g}{2\sqrt{2gz + V_0^2}}r^2 + A$$

rで割って

$$v_r = \frac{-g}{2\sqrt{2gz + V_0^2}}r + \frac{A}{r}$$

中心軸上では速度は有限　$A = 0$

よってr方向の速度は

$$v_r = \frac{-g}{2\sqrt{2gz + V_0^2}}r$$

表面での流速が表面に平行になっていることを確認する

表面に平行な方向

$$\frac{dR(z)}{dz} = \frac{-gR_0\sqrt{V_0}}{2\left(2gz + V_0^2\right)^{5/4}}$$

表面での速度成分の比は

$$\left.\frac{v_r}{v_z}\right|_{r=R} = \frac{1}{\sqrt{2gz + V_0^2}}\frac{-g}{2\sqrt{2gz + V_0^2}}\frac{R_0\sqrt{V_0}}{\left(2gz + V_0^2\right)^{1/4}} = \frac{-gR_0\sqrt{V_0}}{2\left(2gz + V_0^2\right)^{5/4}}$$

となり、上式と一致する。