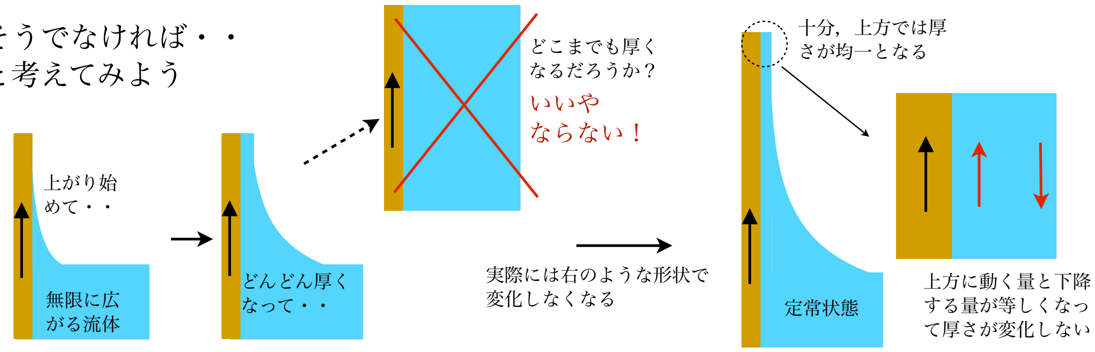
問題17

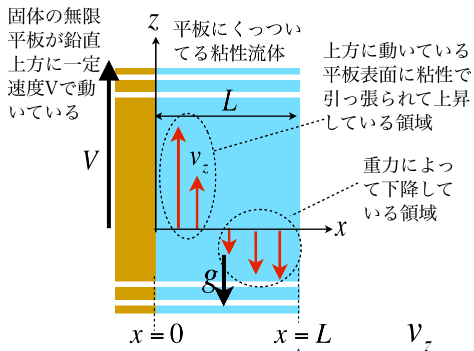
最初に問題の設定を考えてみよう。流体は粘性によって上昇する平板にくっついて上方に引き上げられる。しかし，重力により下降する流れも存在するはず。

そうでなければ・・
と考えてみよう




無限に広がる海のような状態（表面はある）で流体があるとしてそこに平板が登場し，上方に動き始めたとする。最初は下の方（表面近く）だけ流体はくっついているが，次第に表面から離れたところまで動き出す。では上方に動いている領域はどこまでも厚くなるのだろうか？　重力があれば常識的に考えてそれはあり得ない。重力によって下降する流れもあるからである。そして，それにより，時間が経過しても変化しなくなる状態（定常状態）が実現することになる。その状態では表面近くでは下降する量が大きく，上昇する量が下降する量よりも小さいので，厚さは上方ほど薄くなってゆくが，ある程度薄くなったところで，上昇する量と下降する量が等しくなる。それ以降は厚さは変化せず一定の厚さでありそれをLとする。この問題ではその状態での流体内部の流束分布と厚さを考えるものである。

では，問題の系を考えてゆきましょう。




上述の定常状態で液本体から遠く上方で厚さが一定になっているところに着目する。座標に関しては左図のように，直角(デカルト)座標で平板に沿う鉛直上方をz，平板に垂直な方向をxとする。ここで，この問題の本質として考えるべきは，平板からの粘性力で上方に引き上げられ，重力で下降してくるということ，すなわち，運動の式（直角座標，z成分）で，粘性力と重力のバランスを考えれば良い。

運動の式(直角座標，z成分)　$\nu\dfrac{d^2v_z}{dx^2}+\dfrac{F_z}{\rho}=0$

粘性力項と重力項

動粘性係数の定義　$\nu=\dfrac{\mu}{\rho}$　重力はzの負の方向なので $F_z=-\rho g$

表面に接触している　自由表面

解くべき微分方程式は２階の方程式なので境界条件は２つ必要

整理して　$\dfrac{d^2v_z}{dx^2}=\dfrac{\rho g}{\mu}$　解くべき微分方程式

境界条件をしっかり考える

フラックスがゼロ　$\dfrac{dv_z}{dx}=0$ at $x=L$　①

この方程式を左の条件で解けば良い。

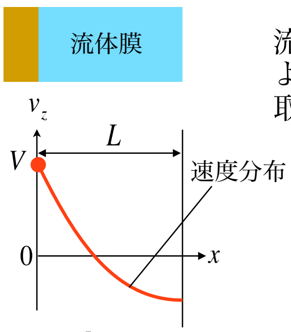
粘着条件　$v_z=V$ at $x=0$　②

1回積分　$\dfrac{dv_z}{dx}=\dfrac{\rho g}{\mu}x+A$　A:積分定数

ここで境界条件①より $\dfrac{\rho g}{\mu}L+A=0 \rightarrow A=-\dfrac{\rho g}{\mu}L$　式を整理して $\dfrac{dv_z}{dx}=\dfrac{\rho g}{\mu}x-\dfrac{\rho g}{\mu}L$

さらに積分 $v_z=\dfrac{\rho g}{2\mu}x^2-\dfrac{\rho g}{\mu}Lx+B$　境界条件②より $B=V$

$$\boxed{v_z=\frac{\rho g}{2\mu}x^2-\frac{\rho g}{\mu}Lx+V=\frac{\rho g}{2\mu}(x-L)^2+V-\frac{\rho gL^2}{2\mu}}$$




流速分布は左のように描くことができる。膜の内部で流速がゼロになる位置があり，それより内側は上昇，外側が下降ということがわかる。z方向でHの高さである領域だけを切り取り，それに作用する粘性力と重力を求め，比較すると釣り合っていることがわかる

(粘性力)＝（せん断力)×(面積)　　(重力)＝（体積力)×(体積)

$$\left.\frac{dv_z}{dx}\right|_{x=0}=-\frac{\rho gL}{\mu}$$ なので $$-\mu\left(-\frac{\rho gL}{\mu}\right)\times H=\rho gLH \qquad -\rho g\times LH=-\rho gLH$$

厚さLが均一であるためにはzに垂直な面を通過する液体の量はトータルでゼロ：収支の意味の復習

$$\int_0^L v_z dx=0$$

$$\int_0^L\left(\frac{\rho g}{2\mu}x^2-\frac{\rho g}{\mu}Lx+V\right)dx=\left[\frac{\rho g}{6\mu}x^3-\frac{\rho g}{2\mu}Lx^2+Vx\right]_0^L=-\frac{\rho g}{3\mu}L^3+VL=0 \qquad L=\sqrt{\frac{3\mu V}{\rho g}}$$