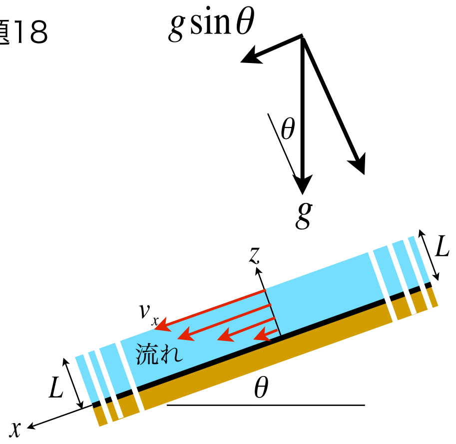
問題18




ここではまだ基礎方程式の使い方を習熟していないが，普通のデカルト座標で斜面に沿う方向をx，斜面に垂直方向をzとする。流れはx成分のみで重力によって生じる流れは図のように分布し，運動量は斜面の方向に移動し，斜面表面に粘性まさつ力を与えている。重力とこの摩擦力の反作用はバランスしており，流れは定常状態となっている。定常なので，液膜の厚さ（高さ）はLで一定となっている。直角座標，運動の式のx成分の式で，粘性力と重力のバランスを考えると，

$$\mu\frac{d^2v_x}{dz^2}+\rho g\sin\theta=0$$

基礎方程式から，定常，x成分のみ，無限平板，圧力勾配なし，外力は重力のx方向成分で

$$F_x=\rho g\sin\theta$$

さて，本問では，境界条件をしっかり考えよう。

斜面の無限平板は固定されている。つまり静止している。この平板に接触している流体(水)の速度は固体壁(斜面の平板)と一致する。これを粘着条件という。

$$v_x=0 \quad \text{at} \quad z=0 \qquad ①$$

流体の表面は実際には気体等があるものの，その面を通過する運動量がない。分子の相互作用による運動量移動を考えれば納得できる。一般的には，このような自由表面ではフラックスがゼロ，移動係数はゼロではないので，勾配がゼロとなる

$$\frac{\partial v_x}{\partial z}=0 \quad \text{at} \quad z=L \qquad ②$$

積分して一般解を得る

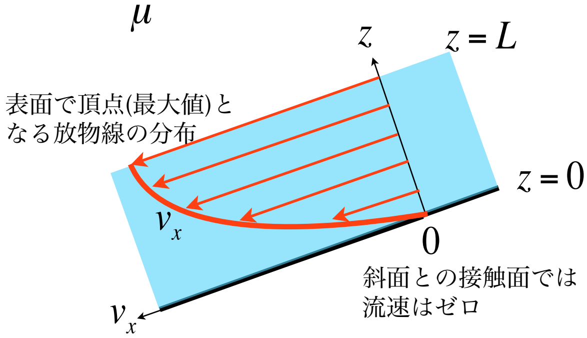
$$\frac{d^2v_x}{dz^2}=-\frac{\rho g\sin\theta}{\mu} \quad\rightarrow\quad \frac{dv_x}{dz}=-\frac{\rho g\sin\theta}{\mu}z+A \quad\rightarrow\quad v_x=-\frac{\rho g\sin\theta}{2\mu}z^2+Az+B$$

積分定数を境界条件で決定する　　条件②より $A=\dfrac{\rho g\sin\theta}{\mu}L$　　条件①より $B=0$

$$v_x=-\frac{\rho g\sin\theta}{2\mu}z^2+\frac{\rho g\sin\theta L}{\mu}z$$

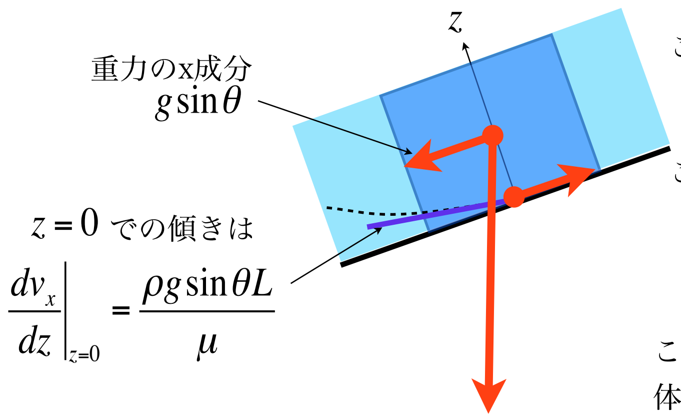
↓わかりやすく整理

$$v_x=-\frac{\rho g\sin\theta}{2\mu}(z-L)^2+\frac{\rho g\sin\theta L^2}{2\mu}$$




解の検証

厚さ全体の高さL，適当な底面積Aの要素（図の濃い青色の部分）に作用する力のバランスを考える。




この要素に作用する重力に関係する力積

$$AL\rho g\sin\theta dt$$

この要素下面に作用する粘性まさつ力（力積）

$$-\mu\left.\frac{dv_x}{dz}\right|_{z=0}Adt=-\rho g\sin\theta ALdt$$

この力の反作用が流体要素に作用するので，流体要素に作用する力は釣り合っている。
定常状態の実現は矛盾しない。