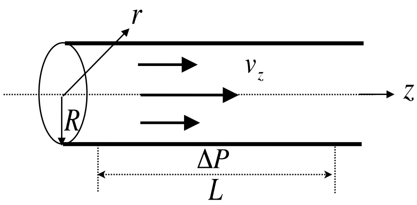
問題19　円管内定常流れ(Hagen-Poiseuille流れ)

水道局から家庭まで円管を通って水が供給されている。もちろん，水道局側である程度の圧力をかけているおかげで，離れた場所の蛇口をひねっても水が出る仕組みになっている。水道管は固定されていて，内壁に接触している流体要素はやはり静止している。ということは，内壁に接触していない流体要素はある程度の速度で内壁表面の位置での速度勾配はニュートンの式により壁面にせん断力（摩擦力）を与えることになる。水道局はこの力によって減少する圧力（圧力損失）を考慮した上で，供給元の水圧を設定しいている。

では，その摩擦力を知るためにも円管内の流れの分布，軸方向の流速の半径方向の分布を求めよう。



流体の速度分布を知りたい　→　運動の式

円管内，中心軸に対して軸対象　→　円筒座標

座標の設定は右図の通り，　知りたいのはz方向の流速　→　z成分

基礎方程式
$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} = \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right] - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{F_z}{\rho}$$

簡単化　定常状態　→　$\frac{\partial}{\partial t} = 0$　　軸対称　→　$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$　　軸方向には十分長く流れていて，変化しなくなっている　→　$\frac{\partial}{\partial z} = 0$

流速はz成分のみ　→　$v_r = v_\theta = 0$　　特に問題で指摘されていないので外力は考えない　→　$F_z = 0$

圧力勾配は問題で与えられている　→　$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{-\Delta P}{L}$

解くべき式　$\nu\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\Delta P}{L} = 0$　　この段階で１変数のみの微分になっており，∂ではなくdを使う　　$\nu = \frac{\mu}{\rho}$　なので，もう少し簡単にしておく

→　$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right) = -\frac{1}{\mu}\frac{\Delta P}{L}$

境界条件

（軸対象で定常）　$\frac{\partial v_z}{\partial r} = 0 \quad at \quad r = 0$　①

（粘着条件）　$v_z = 0 \quad at \quad r = R$　②

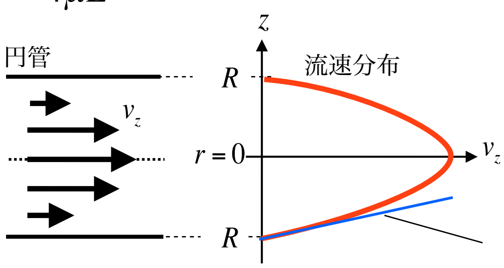
r を両辺にかけて　$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right) = -\frac{1}{\mu}\frac{\Delta P}{L}r$

積分して　$r\frac{dv_z}{dr} = -\frac{1}{2\mu}\frac{\Delta P}{L}r^2 + A$　　r で割って　$\frac{dv_z}{dr} = -\frac{1}{2\mu}\frac{\Delta P}{L}r + \frac{A}{r}$　　境界条件①より　$A = 0$

$\frac{dv_z}{dr} = -\frac{\Delta P}{2\mu L}r$　　さらに積分する　$v_z = -\frac{\Delta P}{4\mu L}r^2 + B$　　境界条件②より　$B = \frac{\Delta P}{4\mu L}R^2$

式を整理する

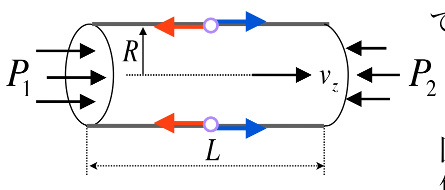
解　$v_z = \frac{\Delta P}{4\mu L}(R^2 - r^2)$



中心軸の位置で流速が最大となり，そこを頂点とす放物線の分布になる。

$$\left.\frac{dv_z}{dr}\right|_{r=R} = -\frac{R\Delta P}{2\mu L}$$

解を検証する：壁面に作用する力，圧力差を作用反作用で考える



流体が壁に摩擦力を作用させているので流体は反作用の抵抗力を受けている　$\tau = -\mu\left.\frac{dv_z}{dr}\right|_{r=R} = \frac{R\Delta P}{2L}$

作用面の面積をかけて　$2\pi RL\tau = \pi R^2\Delta P$

図の円柱部分の流体に作用する圧力　$\pi R^2(P_1 - P_2) = \pi R^2\Delta P$

円柱部分の流体に作用する力は釣り合っている

検証できた！