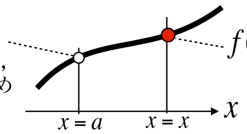
問題31　余誤差関数のマクローリン展開

余誤差関数の変数をNとして表記する $\underset{\text{余誤差関数}}{\mathrm{erfc}(N)} = 1 - \underset{\text{誤差関数}}{\mathrm{erf}(N)} = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^N \mathrm{e}^{-u^2}du$

誤差関数は陽に積分できない形で表され，積分範囲の上限がその変数となる。この際，被積分関数の変数は何でも良いが，ここでは資料と同じくuとする。

何とか陽に表現したいのでべき級数展開(テーラー展開）を利用してみる。Taylor展開は微分可能な関数y=f(x)のxにおける値をx=aでの関数値，導関数値で表現する

x=aで無限回数微分可能であれば　f(a), f'(a), f''(a), $f^{(3)}$(a), ・・・を求めることができる



$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

無限項のべき級数展開

ここでは固体表面(x=0) 近傍での境界層内のプロフィールを考えているので，テーラー展開におけるaを０として考える。（マクローリン展開）

数学の復習　x=０のまわりのf(x)のテーラー展開（マクローリン展開），Maclaurin Expansion

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

$\mathrm{erfc}(N)$ をマクローリン展開するとして，導関数を先に準備する。

$\mathrm{erfc}(N)$ の１階微分 $\dfrac{d}{dN}\mathrm{erfc}(N) = \mathrm{erfc}^{(1)}(N) = -\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-N^2}$　　$\mathrm{erfc}(N)$ の２階微分 $\dfrac{d^2}{dN^2}\mathrm{erfc}(N) = \mathrm{erfc}^{(2)}(N) = \dfrac{4N}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-N^2}$

$\mathrm{erfc}(N)$ の３階微分 $\dfrac{d^3}{dN^3}\mathrm{erfc}(N) = \mathrm{erfc}^{(3)}(N) = \dfrac{4}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-N^2} - \dfrac{8N^2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-N^2}$

N=0を代入してマクローリン展開を実行する。

$$\mathrm{erfc}(N) = \mathrm{erfc}(0) + \frac{\mathrm{erfc}^{(1)}(0)}{1!}N + \frac{\mathrm{erfc}^{(2)}(0)}{2!}N^2 + \frac{\mathrm{erfc}^{(3)}(0)}{3!}N^3 + \cdots = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}N + \frac{2}{3\sqrt{\pi}}N^3$$

ここで，境界層は固体表面回りで表面近傍と考えれば変数Nはかなり小さい値となっているので，マクローリン展開の比較的低階微分までで十分と考えることにする。１階微分まででは，直線分布となり，解析解との相違が顕著であるので，ここでは３階微分の項まで考慮する。（２階微分の項はゼロになる）

$N = \dfrac{y}{2\sqrt{\nu t}}$　であるので，これを上式に代入して整理する。

$$\frac{v_x}{V} = \mathrm{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{y}{\sqrt{\nu t}} + \frac{1}{12\sqrt{\pi}}\left(\frac{y}{\sqrt{\nu t}}\right)^3$$

$N = \dfrac{y}{2\sqrt{\nu t}}$　とおかずに，直接yを変数として展開しても同じことになる

1階から3階までの導関数

$$\frac{d}{dy}\mathrm{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right) = \mathrm{erfc}^{(1)}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{\left(-\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right)^2}\left(\frac{1}{2\sqrt{\nu t}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{\pi\nu t}}e^{\left(-\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right)^2}$$

$$\frac{d^2}{dy^2}\mathrm{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right) = \mathrm{erfc}^{(2)}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{\pi\nu t}}e^{\left(-\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right)^2}2\left(-\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{\nu t}}\right) = \frac{y}{\sqrt{\pi\nu t}}\frac{1}{2\nu t}e^{\left(-\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right)^2}$$

$$\frac{d^3}{dy^3}\mathrm{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right) = \mathrm{erfc}^{(3)}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu t}}\frac{1}{2\nu t}e^{\left(-\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right)^2} + \frac{y}{\sqrt{\pi\nu t}}\frac{1}{2\nu t}e^{\left(-\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right)^2}2\left(-\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{\nu t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu t}}\frac{1}{2\nu t}e^{\left(-\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right)^2} - \frac{y^2}{\sqrt{\pi\nu t}}\frac{1}{4\nu^2t^2}e^{\left(-\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right)^2}$$

y=0 として展開する

$$\mathrm{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right) = \mathrm{erfc}(0) + \frac{\mathrm{erfc}^{(1)}(0)}{1!}N + \frac{\mathrm{erfc}^{(2)}(0)}{2!}N^2 + \frac{\mathrm{erfc}^{(3)}(0)}{3!}N^3 + \cdots = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi\nu t}}y + \frac{1}{12\sqrt{\pi\nu t}}\frac{1}{\nu t}y^3$$