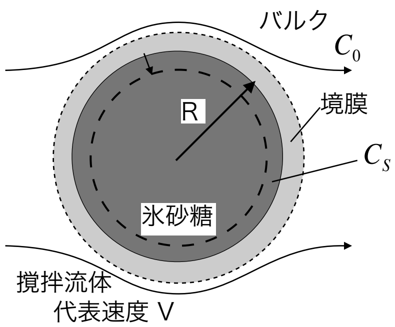
問題34　球形氷砂糖の流体中での溶解



球形の氷砂糖が撹拌流体中にあって，表面から砂糖が溶け出している。溶解速度は砂糖表面近傍の境膜内物質移動律速であるという設定。流体の方は無限に広がっていて砂糖が溶けてもバルクの濃度は変化しない。また，砂糖の表面では砂糖の飽和濃度になっている（平衡に到達している）という状況で，境膜の速度式で表面からの溶解量を記述し，擬定常を用いて，氷砂糖のサイズの減少を式で表現する。

速度式 $N = k_d(C_S - C_0)$

C_S 表面の濃度．今回は数値が与えられているが，単純に考えれば砂糖の飽和濃度ということになる

k_d 境膜内物質移動速度定数

$C_0(=0)$ バルク内の濃度でここではゼロ

dt時間での物質収支
（dt時間で半径がdR変化）

境膜を移動する量　氷砂糖の減少量

$$NSdt = -\rho SdR$$

S 氷砂糖の表面積
ρ 氷砂糖の密度

右の収支式がすんなり理解できない場合は，体積変化から考えても良い

t=tでの量　t=t＋dtでの量

$$\rho V(t) - NSdt = \rho V(t+dt)$$

$$V(t) = \frac{4\pi}{3}R(t)^3 \rightarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi R^2\frac{dR}{dt} = S\frac{dR}{dt}$$

半径Rの時間変化を求める方程式

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{k_d}{\rho}(C_S - C_0)$$

右辺は厳密にはRe数を介してRに依存するがここでは一定とする

初期条件
$R = R_i \quad at \ t = 0$

積分して解を求める

$$R = A - \frac{k_d(C_S - C_0)}{\rho}t$$

初期条件より
$A = R_i$

$$R = R_i - \frac{k_d(C_S - C_0)}{\rho}t$$

さらに数値を代入して具体的な値を計算する。

最初に考えるべきは k_d の算出　採用する無次元数の相関式　$Sh = 2.0 + 0.6Re^{1/2}Sc^{1/3}$

基本的な無次元数の計算

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho Vd}{\mu} = \frac{(1000)(0.012)(0.024)}{(0.002)} = 144$$

$$Sc = \frac{\mu}{\rho D} = \frac{(0.002)}{(1000)(2\times10^{-9})} = 1000$$

$$Sh = 2.0 + (0.6)(12)(10) = 74$$

k_d の算出

$$Sh = \frac{k_d d}{D}$$

$$k_d = \frac{DSh}{d} = \frac{(2\times10^{-9})(74)}{(0.024)} = 6.17\times10^{-6}$$

$$k_d = 6.17\times10^{-6} \ \ m/s$$

数値を代入したRの式

$$R = 0.012 - \frac{(6.17\times10^{-6})(800)}{(1200)}t = 0.012 - 4.11\times10^{-6}t$$

半径が初期値から大きく変化した場合には，仮定である「レイノルズ数が変化しない」が成立しなくなるので，ごく初期の現象について１つ例を計算した。

例えば半径が初期値の4/5になるまでの時間を計算する。

$$\frac{(0.012)}{5} = 4.11\times10^{-6}t$$

$$t = 584 \ s = 9m44s$$

例えば初期における表面からの溶解速度（kg/s)を計算する。フラックス×面積

$$NS\big|_{R=R_i} = k_d(C_S - C_0)S = (6.17\times10^{-6})(800)(4)(3.14)(0.012)^2 = 8.93\times10^{-6}$$

$$n = 8.93\times10^{-6} \ \ kg/s$$