移動速度論　Transport Phenomena　　宿題レポート

提出予定日　６月２９日　提出日＿＿＿月＿＿＿日　　学生番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

問題29　放物型の偏微分方程式を変数分離法を用いて解く。

ξ と τ の関数 $\Theta(\xi,\tau)$ に関する方程式　$\dfrac{\partial\Theta}{\partial\tau}=\dfrac{\partial^2\Theta}{\partial\xi^2}$　　Dirichlet境界条件　$\Theta=0\ \ at\ \ \xi=0$　　Neumann境界条件　$\dfrac{\partial\Theta}{\partial\xi}=0\ \ at\ \ \xi=1$

変数分離で ξ に関する関数がノイマン，ディリクレ境界条件で，三角関数の級数になることを見越して，初期条件は後回し

変数分離法の最初の一歩　$\Theta(\xi,\tau)=$＿＿＿＿＿＿　と仮定する。　（　　　　）方程式の解の（　　　　）性により正当化される

元の方程式に代入　＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　$\xrightarrow{\text{両辺を } X(\xi)\bullet Y(\tau) \text{ で割る}}$　＿＿＿＿＿ = ＿＿＿＿＿ = ア

τのみの関数　　ξのみの関数

τ のみの関数と ξ のみの関数が等しいのは　両者が（ア　　　　）の場合のみ。そして，後出の τ に関する初期条件とは別に，講義での例題（無限平板の冷却）では．Θ が（つまり温度が）τ とともに発散しないという条件も前提なので，$Y(\tau)$に関する解を先取りして考え，発散しないように，この（ア）を $-\beta^2$とおく。

$Y(\tau)$ の方程式　＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　　解 $Y(\tau)=$＿＿＿＿＿　Cは積分定数

初期条件によるCの決定は後回し

$X(\xi)$ の方程式　＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

１つの偏微分方程式が２つの常微分方程式になった。
ここが変数分離法の本質　　　解 $X(\xi)=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　A,Bは積分定数

A, B については $X(\xi)$ に関する境界条件によって決定したい。

境界条件＿＿＿＿＿　$at\ \ \xi=0$ → ＿＿＿＿＿＿＿＿ → $B=$＿＿＿

定数Bは簡単に決定できたが，定数Aはここでは決定できない。一方，変数分離で出現した定数βは次のようになる。

境界条件＿＿＿＿＿　$at\ \ \xi=1$ → ＿＿＿＿＿＿＿＿ ――――→ $\beta_n=$＿＿＿＿＿

β_n は $\beta_0,\beta_1,\beta_2\cdots$と無限に続く定数で，固有値といい，それに対応する　$\sin\beta_n\xi$ を固有関数という。解は固有関数の線形結合（無限級数展開）で表現され，それぞれの固有関数の係数を A_nとして，解をまとめる。　　$X(\xi)=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

最初の仮定に戻って，Θ の解を書き下す。　$\Theta(\xi,\tau)=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　Cnは積分定数

ここで初期条件を用いる　$\Theta=$＿＿　$at\ \ \tau=0$ → $\Theta(\xi,0)=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ $=1$

級数の直接的な表現　$C_0\sin\beta_0\xi+C_1\sin\beta_1\xi+C_2\sin\beta_2\xi+\cdots+C_n\sin\beta_n\xi+\cdots=1$

さらにここで，固有関数の直交性を利用して係数を決定する。（資料を参考にするが，ここでも証明する）

$\sin\beta_n\xi$ を両辺に乗じて　$\xi=0\rightarrow1$　で定積分する。

・$n\neq m$ の場合　$\int_0^1\sin\beta_n\xi\sin\beta_m\xi d\xi=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ $=$＿＿＿　　これが関数の直交性

・$n=m$ の場合　$\int_0^1\sin\beta_n\xi\sin\beta_n\xi d\xi=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ $=$＿＿＿

$\dfrac{C_n}{2}=$＿＿＿＿＿＿＿＿ $=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ $=$＿＿＿＿＿＿

よって　$C_n=$＿＿＿＿＿＿　　最終的に　$\Theta(\xi,\tau)=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

移動速度論　Transport Phenomena　　宿題レポート

提出予定日　６月２９日　提出日＿＿＿＿月＿＿＿＿日　学生番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

問題31　　余誤差関数のマクローリン展開

簡単に考えるために変数がNとして　余誤差関数を表記すると　$\mathrm{erfc}(N) =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

x＝０のまわりのf(x)のテーラー展開（マクローリン展開），Maclaurin Expansion

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$\mathrm{erfc}(N)$ のマクローリン展開

N=0を代入して

準備として

$\mathrm{erfc}(0) =$ ＿＿＿

$\mathrm{erfc}(N)$ の１階微分　$\dfrac{d\,\mathrm{erfc}(N)}{dN} =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿　　$\dfrac{d\,\mathrm{erfc}(0)}{dN} =$ ＿＿＿

$\mathrm{erfc}(N)$ の２階微分　$\dfrac{d^2\,\mathrm{erfc}(N)}{dN^2} =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　$\dfrac{d^2\,\mathrm{erfc}(0)}{dN^2} =$ ＿＿＿

$\mathrm{erfc}(N)$ の３階微分　$\dfrac{d^3\,\mathrm{erfc}(N)}{dN^3} =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　$\dfrac{d^3\,\mathrm{erfc}(0)}{dN^3} =$ ＿＿＿

ここで，境界層は固体表面回りで表面近傍と考えれば変数Nはかなり小さい値となっているので，マクローリン展開の比較的低階微分までで十分と考えることにする。１階微分まででは，直線分布となり，解析解との相違が顕著であるので，ここでは３階微分の項まで考慮する。（２階微分の項はゼロになる）

$\mathrm{erfc}(N) =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

解析解では　$N =$ ＿＿＿＿＿＿　であるので，これを上式に代入して整理する。

$$\frac{v_x}{V} = \mathrm{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right) =$$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿