確認２　定常問題と遷移状態

① 回転無限円柱周りの定常流れ（問題25）

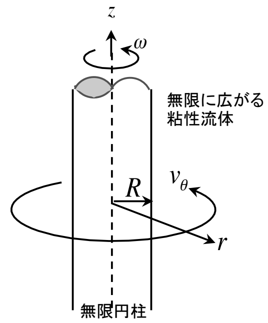
流体の速度分布を知りたい　→　運動の式

無限円柱，中心軸に対して軸対称　→　円筒座標

座標の設定は問題の通り　知りたいのはしθ方向の流速　→　θ成分

無限円柱ということでz方向の変化は無い．ということは 流速のz成分はない。

さらにいうなら連続の式よりr成分もない。



基礎方程式（運動の式，円筒座標，θ成分）

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z} = \nu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}\right] - \frac{1}{\rho r}\frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{F_\theta}{\rho}$$

簡単化　定常状態 → $\frac{\partial}{\partial t}=0$　軸対象 → $\frac{\partial}{\partial \theta}=0$　無限円柱 → $\frac{\partial}{\partial z}=0$　外力なし→ $F_\theta=0$

流速はθ成分のみ→ $v_r = v_z = 0$　軸対象なのでθ方向の圧力勾配はない→ $\frac{\partial P}{\partial \theta}=0$

解くべき式　$\nu\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d(r v_\theta)}{dr}\right)=0$

粘性項

境界条件

流体の存在する範囲に注意！

流体はRから無限遠まで

(粘着条件)　$v_\theta = R\omega \quad at \quad r = R$　①

(無限遠)　$v_\theta = 0 \quad at \quad r = \infty$　②

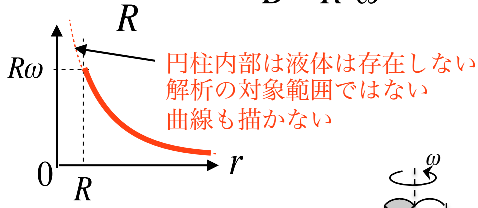
積分する　$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d(r v_\theta)}{dr}\right)=0 \;\rightarrow\; \frac{1}{r}\frac{d(r v_\theta)}{dr}=A \;\rightarrow\; \frac{d(r v_\theta)}{dr}=Ar$　境界条件②より　$A=0$

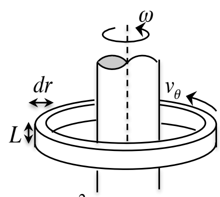
さらに積分　$r v_\theta = \frac{A}{2}r^2 + B \;\rightarrow\; v_\theta = \frac{A}{2}r + \frac{B}{r}$　境界条件①より　$R\omega = \frac{B}{R} \;\rightarrow\; B = R^2\omega$

最終的に →　$\boxed{v_\theta = \frac{R^2\omega}{r}}$

この流速分布は中心軸からの距離に反比例する。

反比例の曲線（双曲線）をイメージする。





② 回転速度が突然変化すると（設定が変わったら）運動量の収支がくずれ，定常でなくなる。

円柱表面からの粘性力を受けて（実際には違うかも知れないが）流体が表面に粘着している。ここの流体要素が粘性で隣の流体要素を動かして，次々と運動量が移動してゆく。①の定常状態は，r方向に対する運動量の総量が一定ということ。

速度×質量

$v_\theta \times 2\pi r L dr \times \rho = 2\pi\rho R^2 \omega L dr$

で一定となっている

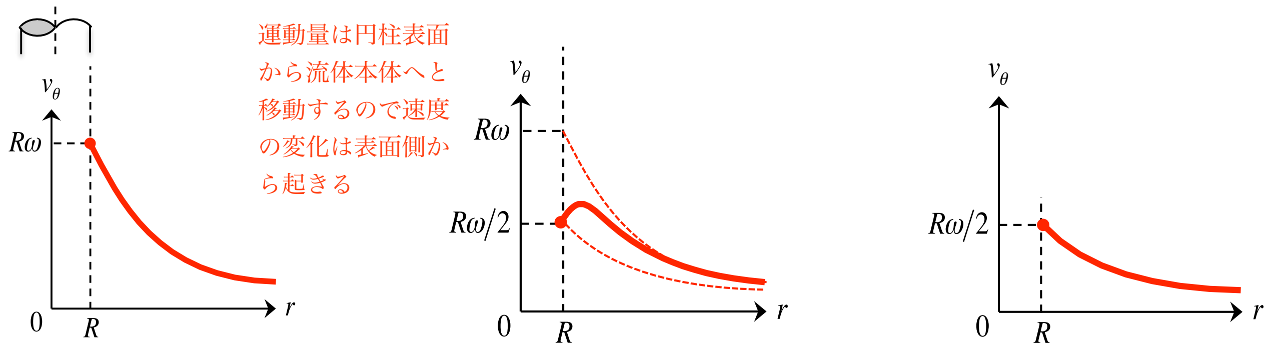
定常でなくなるので新たな定常状態になるまでは非定常項が無視できない。$\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$

の分布が変化するということは，r方向に流体が移動するということ→r成分が無視できない。　$v_r \neq 0$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_r v_\theta}{r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r v_\theta)}{dr}\right)$$

非定常項　　慣性項　　粘性項

これを解くことはできないが，大まかな分布曲線の遷移については推測することができる。



最初の定常状態　　　途中の遷移状態　　　最終の定常状態