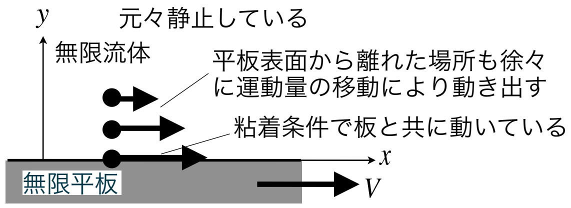
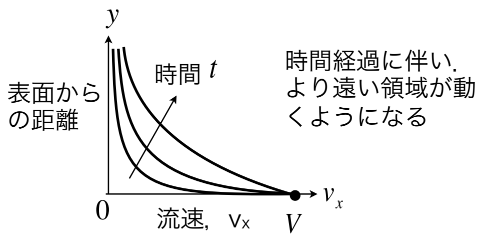
メールアドレス：kozka@kumamoto-u.ac.jp
ＨＰアドレス　：http//www.msre.kumamoto-u.ac.jp/~process/ Transport/home.html

非定常問題１（突然動き出す無限平板）

無限流体中に無限平板があり，ある瞬間に突然一定速度Vで動き出す．

この速度分布の時間変化を導出する（非定常の問題）





基礎方程式：
運動の式，直角座標，x成分

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} = \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{F_x}{\rho}$$

簡単化：流速はx成分のみ，無限平板，流体は平板からの粘性によってのみ駆動されており，圧力勾配，外力は考えない

解くべき式：$\dfrac{\partial v_x}{\partial t} = \nu\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$　放物型偏微分方程式 ➡ いかにして常微分方程式に帰着するか

- ラプラス変換を用いる
- 変数分離法
- 変数合成法　→境界層のプロフィル法

＜ラプラス変換法＞

実空間では解けない！　　ラプラス変換は微分演算を代数演算に変換できる

方程式：$\dfrac{\partial v_x}{\partial t} = \nu\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$

初期条件：$v_x = 0 \quad at \quad t = 0$

境界条件：$v_x = V \quad at \quad y = 0$
$v_x = 0 \quad at \quad y = \infty$

実空間での解 $\dfrac{v_x}{V} = \mathrm{erfc}\left(\dfrac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right)$

ラプラス変換 →

$$\hat{v}_x = \int_0^\infty v_x(y,t)\, e^{-st}dt$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial v_x}{\partial t}e^{-st}dt = s\hat{v}_x(y,s) - v_x(y,0)$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial v_x}{\partial y}\, e^{-st}dt = \frac{\partial}{\partial y}\int_0^\infty v_x\, e^{-st}dt = \frac{\partial \hat{v}_x}{\partial y}$$

← ラプラス逆変換

方程式：$s\hat{v}_x - v_x(0,t) = \nu\dfrac{d^2\hat{v}_x}{dy^2}$

初期条件 →

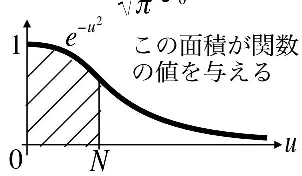
$$s\hat{v}_x = \nu\frac{d^2\hat{v}_x}{dy^2}$$

境界条件：$\hat{v}_x = V/s \quad at \quad y = 0$
$\hat{v}_x = 0 \quad at \quad y = \infty$

解：$\hat{v}_x = \dfrac{V}{s}e^{-\sqrt{\frac{s}{\nu}}y}$　ラプラス空間では解ける！

誤差関数

$$\mathrm{erf}(N) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^N e^{-u^2}du$$



この面積が関数の値を与える

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du \qquad I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u^2+v^2)}dudv$$

$$I^2 = \int_0^\infty e^{-r^2}2\pi r dr = \pi \qquad I = \sqrt{\pi} \longrightarrow \int_0^\infty e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

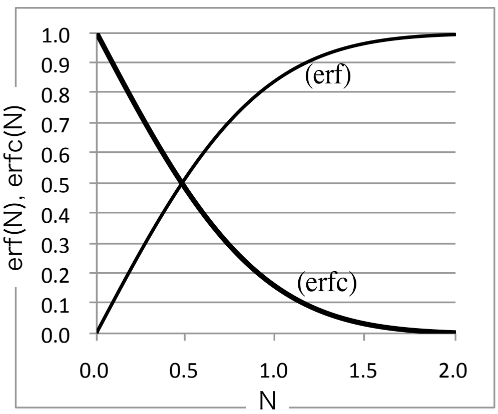
余誤差関数

$$\mathrm{erfc}(N) = 1 - \mathrm{erf}(N)$$

誤差関数の積分を∞までとすると「１」となるように係数を決定する

$$\mathrm{erf}(\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-u^2}du = 1$$

N	erf(N)	erfc(N)
0.0	0.000	1.000
0.1	0.112	0.888
0.2	0.223	0.777
0.3	0.329	0.671
0.4	0.428	0.572
0.5	0.520	0.480
0.6	0.604	0.396
0.7	0.678	0.322
0.8	0.742	0.258
0.9	0.797	0.203
1.0	0.843	0.157
1.1	0.880	0.120
1.2	0.910	0.090
1.3	0.934	0.066
1.4	0.952	0.048
1.5	0.966	0.034
1.6	0.976	0.024
1.7	0.984	0.016
1.8	0.989	0.011
1.9	0.993	0.007
2.0	0.995	0.005



誤差関数と余誤差関数

＜変数合成法＞ ２つ以上の変数のある１つの組み合わせで解が表現される場合

上の解をよくみると $\dfrac{y}{2\sqrt{\nu t}}$ という変数の組み合わせで解が表現されていることに気づく　変数を合成して１つの変数にまとめる $\eta = \dfrac{y}{2\sqrt{\nu t}}$　解は $\dfrac{v_x}{V} = \phi(\eta)$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = V\phi'\frac{d\eta}{dy} = V\phi'\left(\frac{1}{2\sqrt{\nu t}}\right) \qquad \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = V\phi''\left(\frac{d\eta}{dy}\right)^2 = V\phi''\left(\frac{1}{4\nu t}\right)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = V\phi'\frac{d\eta}{dt} = V\phi'\left(-\frac{y}{4t\sqrt{\nu t}}\right) = -V\phi'\frac{\eta}{2t}$$

← 元の方程式に代入．

$$-V\phi'\frac{\eta}{2t} = \nu V\phi''\left(\frac{1}{4\nu t}\right)$$

解くべき式

$$\phi'' + 2\eta\phi' = 0$$

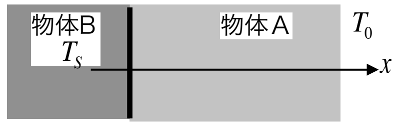
境界条件 $\phi = 1 \quad at \quad \eta = 0$
初期条件 $\phi = 0 \quad at \quad \eta = \infty$

変形して

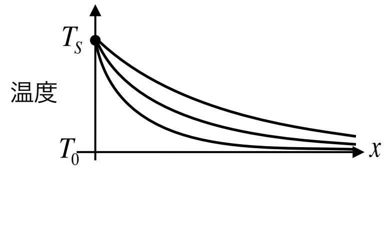
$$\frac{\phi''}{\phi'} = -2\eta \longrightarrow \ln\phi' = -\eta^2 + A \longrightarrow \phi' = Ae^{-\eta^2}$$

これを積分すると誤差関数になる（詳細は問題28　講義プリント）

問題26　熱拡散係数α，温度T_0の半無限体Ａの端部がある瞬間に温度T_Sの物体Bに接触しました（$T_S>T_0$）．物体Bの熱容量，熱拡散係数はともに非常に大きく，物体Ａ内の温度分布の経時変化が問題となります．この経時変化を非定常の一次元熱伝導方程式をラプラス変換を用いて解くことにより導出して下さい．物体Ａは初期温度はT_0でよい。



問題27　上の問題で熱拡散係数α=8.4×10⁻³m²/s，温度T_0=300K，温度T_S=600K　として５秒後ぐらいまでの時間経過をグラフにしなさい。フォーマットはありません。
（補足７参照）



問題28　上述の方程式を変数合成法を用いて解を求めて下さい．