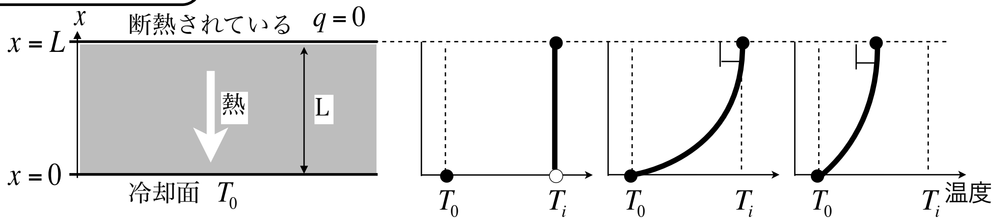
メールアドレス：kozka@gpo.kumamoto-u.ac.jp
ＨＰアドレス　：http//www.msre.kumamoto-u.ac.jp/~process/ Transport/home.html

非定常問題２　有限の厚さのの平板内の伝熱（変数分離法）

＜有限の厚さの平板内の伝熱＞

厚さLの無限平板が温度T_iに設定されている．ある瞬間に下側の壁をT_0に冷却する．もう一方の壁は断熱されている．



基礎方程式　エネルギーの式，直角座標

$$\frac{\partial T}{\partial t}+v_x\frac{\partial T}{\partial x}+v_y\frac{\partial T}{\partial y}+v_z\frac{\partial T}{\partial z}=\alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)+\frac{Q}{\rho C_P}$$

簡単化

無限平板，流速なし，発熱なし

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\quad\xrightarrow{\text{変数変換}}\quad\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}=\frac{\partial^2\Theta}{\partial\xi^2}$$

方程式を簡単に解くために，新しく変数を導入

$\boxed{\mathrm{A}}$

初期条件　$T=T_i\quad at\quad t=0\quad\longrightarrow\quad\Theta=1\quad at\quad\tau=0$

境界条件　$\dfrac{\partial T}{\partial x}=0\quad at\quad x=L\quad\longrightarrow\quad\dfrac{\partial\Theta}{\partial\xi}=0\quad at\quad\xi=1$

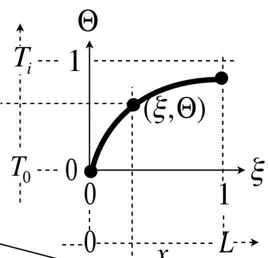
$T=T_0\quad at\quad x=0\quad\longrightarrow\quad\Theta=0\quad at\quad\xi=0$

変数変換の考え方

０－１で変化するような変数をを導入

$$\Theta=\frac{T-T_0}{T_i-T_0}$$

無次元温度



方程式と条件を簡単にする

$$\tau=\frac{\alpha t}{L^2}\qquad\xi=\frac{x}{L}$$

無次元時間　　無次元距離

変数分離法で解く

複数の変数の関数をそれぞれの変数のみの関数の積であると仮定　$\Theta(\xi,\tau)=X(\xi)\bullet Y(\tau)$　これで解が見つかれば，それは求めている解である。 ← 線形微分方程式の解の唯一性

偏微分方程式に代入　$x(\xi)\dfrac{dY(\tau)}{d\tau}=Y(\tau)\dfrac{d^2x(\xi)}{d\xi^2}\longrightarrow\dfrac{1}{Y(\tau)}\dfrac{dY(\tau)}{d\tau}=\dfrac{1}{x(\xi)}\dfrac{d^2x(\xi)}{d\xi^2}=-\beta^2$　左辺はτのみ，右辺はξのみの関数 それが等しい場合は定数のみ（しかし未知）

１つの偏微分方程式が２つの常微分方程式に!

$$\frac{d^2X}{d\xi^2}=-\beta^2X\qquad X=0\quad at\quad\xi=0\qquad\frac{dX}{d\xi}=0\quad at\quad\xi=1\qquad X(\xi)=A\sin\beta\xi+B\cos\beta\xi\longrightarrow$$

$B=0$　境界条件によって定数が決まる（固有値）

$$\beta_n=\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi\quad n=0,1,2\cdots\longrightarrow X(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\sin\beta_n\xi$$

$$\frac{dY}{d\tau}=-\beta^2Y\qquad Y=1\quad at\quad\tau=0\qquad Y(\tau)=Ce^{-\beta^2\tau}$$

$$\Theta(\xi,\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\sin\beta_n\xi\ e^{-\beta_n{}^2\tau}$$

この段階では初期条件はまだ適用していない

初期条件より無限級数の係数を導出　$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}C_n\sin\beta_n\xi=1$

無限級数の係数は固有関数の直交性により導くことができる。　$C_n=\dfrac{2}{(1/2+n)\pi}$

最終的な解　$\displaystyle\boxed{\Theta(\xi,\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(1/2+n)\pi}\sin\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi\xi\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{2}+n\right)^2\pi^2\tau}}$

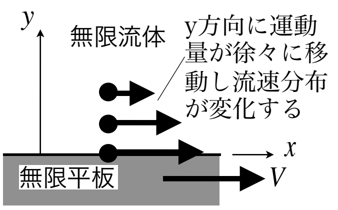
３年前期　実験７のレポートで再出

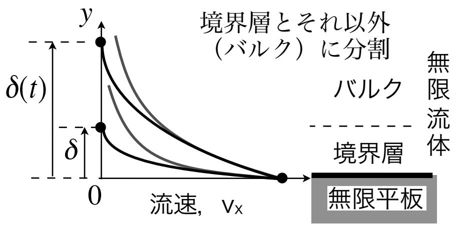
問題29 $\boxed{\mathrm{A}}$ の偏微分方程式を変数分離法，固有関数の直交性を用いて解け。

問題30 問題27と同じ条件でL＝０.5mとして６分後までの時間経過をグラフにしなさい。（資料裏参照）

突然動き出す無限平板周りの流れ（無限平板周りの境界層ー積分プロフィル法ー）

前回の問題





プロフィル法

着目する領域を設定する（無限としない）

プロフィールを仮定する（多項式近似）

前回の解をマクローリン展開して，多項式を決める。

$$\frac{v_x}{V}=\mathrm{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{y}{\sqrt{\nu t}}\right)+\frac{1}{12\sqrt{\pi}}\left(\frac{y}{\sqrt{\nu t}}\right)^3\ \text{---㋐}$$

３次の項まで

前回の変数合成法と同様に　$\dfrac{v_x}{V}=\phi(\eta)\qquad\eta=\dfrac{y}{\delta}\qquad\delta\propto\sqrt{\nu t}$

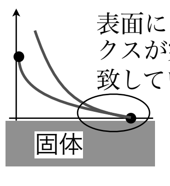
マクローリン展開からプロフィール関数を設定　$\phi=1-A\eta+B\eta^3$　プロフィール関数

A,Bを決める条件　境界条件　$\phi=1\quad at\quad\eta=0$ — 設定時に満足している

$\phi=0\quad at\quad\eta=1\qquad 1-A+B=0$ ---㋑

境界層が成立する条件(重要！)

境界層を導入することで，解析的に解けない系でも運動量流束(せん断力)，熱流束，物質流束に関して表面に限定して答えを見つけることができる。 しかし，実際の速度は解析解どおりの分布であり，境界層という別の層が存在しているわけではない。境界層理論を正当化するために課せられる条件とは→



表面におけるフラックスが実際の値と一致していること！！

$$\left.\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|_{y=0}=V\phi'|_{\eta=0}\frac{d\eta}{dy}=-\frac{AV}{\delta}$$

解析解から　$\left.\dfrac{\partial v_x}{\partial y}\right|_{y=0}=-\dfrac{V}{\sqrt{\pi\nu t}}\qquad A=\dfrac{\delta}{\sqrt{\pi\nu t}}$ ---㋒

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\longrightarrow V\phi'\left(-\frac{\eta}{\delta}\right)\frac{d\delta}{dt}=\nu V\frac{\phi''}{\delta^2}$$

積分プロフィル法

境界層内で定積分

境界層は薄い

$$M\frac{d\delta}{dt}=N\frac{\nu}{\delta}\qquad\delta=\sqrt{\frac{2N}{M}}\sqrt{\nu t}\ \text{---㋓}$$

M,NはA,Bを含む定数

$$M=\int_0^1(-\eta\phi')d\eta\qquad N=\int_0^1\phi''d\eta$$

㋑,㋒,㋓よりAの値を求める。A=1.41561・・　便宜性を重視して，A=1.5, B=0.5 を採用（今後すべてこれを採用）

$$\boxed{\phi=1-\frac{3}{2}\eta+\frac{1}{2}\eta^3}$$

問題31 マクローリン展開で３次の項までを考慮し㋐を導出して下さい。