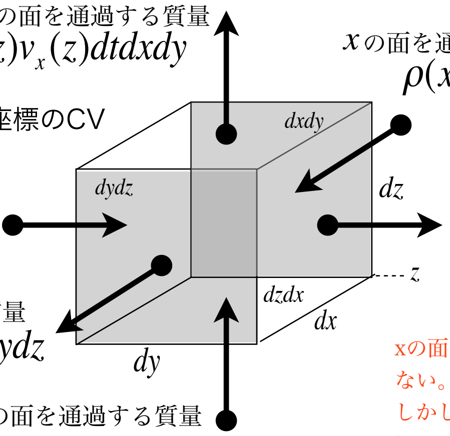
補足６　直角座標の連続の式

CVに対して６つの方向の→を描き，その量を数式で表現する



xの面とx＋dxの面はdiscrete，すなわち離散的であり，連続していない。よって変数xの値を考える時は，別々に考える。
しかし，例えばxの面のなかで，変数yとかzを考える場合，面内でyはy〜y+dyまで連続的に変化しており，y=yでの値を面内の代表値として考えれば良い。

dt時間でのCVに対する質量の収支を考える

ここではまず　密度は均一でない　と考えておく

（最初(t=t)のCVの質量）　$\rho(t)dxdydz$　　（CVの体積：$dxdydz$　）

（x方向の出入り）　＋ $\rho(x)v_x(x)dtdydz$　－ $\rho(x+dx)v_x(x+dx)dtdydz$

（y方向の出入り）　＋ $\rho(y)v_x(y)dtdxdz$　－ $\rho(y+dy)v_x(y+dy)dtdxdz$

（z方向の出入り）　＋ $\rho(z)v_x(z)dtdxdy$　－ $\rho(z+dz)v_x(z+dz)dtdxdy$

これらの値はt〜t+dtまで連続的に変化する時間での値なので，t=t での値を代表値とする

（dt時間経過後(t=t+dt)の質量）　＝ $\rho(t+dt)dxdydz$

時間に関しては面とかを考えることはできないが，時間t に着目する場合はtとt+dtでの値は離散的であると考える

それぞれの微小量に対してテーラー展開を適用する

（ t に関して）　$\rho(t+dt)=\rho(t)+\left.\dfrac{\partial\rho}{\partial t}\right|_t dt$

（xに関して）　$\rho(x+dx)v_x(x+dx)=\rho(x)v_x(x)+\left.\dfrac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\right|_x dx$

（yに関して）　$\rho(y+dy)v_y(y+dy)=\rho(y)v_y(y)+\left.\dfrac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}\right|_y dy$

（zに関して）　$\rho(z+dz)v_z(z+dz)=\rho(z)v_z(z)+\left.\dfrac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right|_z dz$

収支式に代入して
同じ項を相殺する。

$$
\begin{aligned}
&\cancel{\rho(t)dxdydz}\\
&+\cancel{\rho(x)v_x(x)dtdydz}-\left(\cancel{\rho(x)v_x(x)}+\left.\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\right|_x dx\right)dtdydz\\
&+\cancel{\rho(y)v_x(y)dtdxdz}-\left(\cancel{\rho(y)v_y(y)}+\left.\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}\right|_y dy\right)dtdxdz\\
&+\cancel{\rho(z)v_x(z)dtdxdy}-\left(\cancel{\rho(z)v_z(z)}+\left.\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right|_z dz\right)dtdxdy\\
&=\left(\cancel{\rho(t)}+\left.\frac{\partial\rho}{\partial t}\right|_t dt\right)dxdydz
\end{aligned}
$$

⇨ $-\left.\dfrac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\right|_x dxdtdydz-\left.\dfrac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}\right|_y dydtdxdz-\left.\dfrac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right|_z dzdtdxdy=\left.\dfrac{\partial\rho}{\partial t}\right|_t dtdxdydz$

それぞれの微分係数はそれぞれ t, x, y, z の位置での係数であるが，これらの t, x, y, z は一般性があるので，ことさらこれらの位置でとことわる必要がないとする。

さらに，$dtdxdydz$　は微少量であってもゼロではないので割ってしまって整理する。

⇨ $\boxed{\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\dfrac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\dfrac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\dfrac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0}$

これは連続の式と呼ばれ，
空間内で流体が生まれたり，
消滅しないことを意味する。

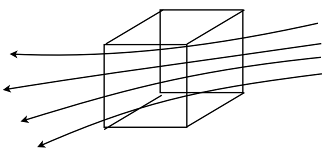
実質微分とベクトルを用いると
$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\nabla\bullet\mathbf{v}=0$$

密度が一定とすると

$\boxed{\dfrac{\partial v_x}{\partial x}+\dfrac{\partial v_y}{\partial y}+\dfrac{\partial v_z}{\partial z}=0}$　ベクトルで表現すると　$\nabla\bullet\mathbf{v}=div\mathbf{v}=0$

このベクトル演算子は発散（ダイバージェンス）といってガウスの発散定理によって

$\iiint_V div\mathbf{v}\,dV=\iint_S \mathbf{v}\bullet d\mathbf{S}=0$　となる。



微小要素に出入りする質量（体積）を表面全体に渡って積分するとゼロになる。
すなわち，微小要素内で流体は，湧き出たり，消滅したりしないということ。