問題22　２重管内の温度分布

内管，外管は同心軸に一致しており，内側の高温流体と外側の冷却雰囲気の温度はそれぞれTH，TLで一定とする。解くべき対象領域は，２重管の内部であり，固体内の伝導による熱移動の問題となっている。現象としては，中心軸から半径方向に（放射状に）熱は移動しており，温度分布は軸対象となるはずである（そうでなければ，周方向(θ 方向)に温度勾配が存在する，すなわち軸対象でなくなってしまう）。内管，外管ともに円筒座標の熱移動の式を基礎方程式として，簡単化の過程も同じである。

基礎方程式 $$\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right\} + \frac{Q}{\rho C_P}$$

簡単化　定常状態→ $\frac{\partial}{\partial t} = 0$　軸対象→ $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$　無限長の円管ということでz方向には変化がない → $\frac{\partial}{\partial z} = 0$

静止固体内で流速なし→ $v_r = v_\theta = v_z = 0$　問題に何の記載もないので発熱もない→ $Q = 0$

解くべき式 $$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = 0$$

境界条件
内管と外管で異なっている

(内管) $T = T_H \quad at \quad r = r_i$
$T = T_M \quad at \quad r = r_m$

(外管) $T = T_M \quad at \quad r = r_m$
$T = T_L \quad at \quad r = r_o$

最終的にはTH，TLのみで表現するが，この段階では，とりあえず，中間の温度をTMとしておく

積分して解く $$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = 0 \xrightarrow{\text{積分する}} r\frac{dT}{dr} = A \rightarrow \frac{dT}{dr} = \frac{A}{r} \xrightarrow{\text{もう一度積分する}} T = A\ln r + B$$

境界条件で積分定数を決定する

(内管) $$T_H = A\ln r_i + B \qquad A = \frac{T_M - T_H}{\ln(r_m/r_i)} \qquad B = \frac{T_H \ln r_m - T_M \ln r_i}{\ln(r_m/r_i)}$$
$$T_M = A\ln r_m + B$$

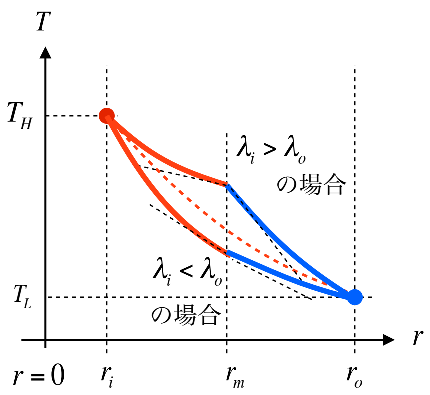
内管に対する解 $$T = \frac{T_M - T_H}{\ln(r_m/r_i)}\ln r + \frac{T_H \ln r_m - T_M \ln r_i}{\ln(r_m/r_i)} \rightarrow \boxed{T\ln\left(\frac{r_m}{r_i}\right) = T_M \ln\left(\frac{r}{r_i}\right) + T_H \ln\left(\frac{r_m}{r}\right)}$$

(外管)
$$T_M = A\ln r_m + B \qquad A = \frac{T_L - T_M}{\ln(r_o/r_m)} \qquad B = \frac{T_M \ln r_o - T_L \ln r_m}{\ln(r_o/r_m)} \rightarrow \boxed{T\ln\left(\frac{r_o}{r_m}\right) = T_L \ln\left(\frac{r}{r_m}\right) + T_M \ln\left(\frac{r_o}{r}\right)}$$
$$T_L = A\ln r_o + B$$

TMを用いたままではだめなので，何らかの条件でTMを決定する必要がある。

内管と外管の境界面における熱フラックスの条件

$$\lambda_i \left.\frac{\partial T(\text{内})}{\partial r}\right|_{r=r_m} = \lambda_o \left.\frac{\partial T(\text{外})}{\partial r}\right|_{r=r_m} \rightarrow \frac{\lambda_i (T_M - T_H)}{r_m \ln(r_m/r_i)} = \frac{\lambda_o (T_L - T_M)}{r_m \ln(r_o/r_m)} \rightarrow \boxed{T_M = \frac{T_H \lambda_i \ln(r_o/r_m) + T_L \lambda_o \ln(r_m/r_i)}{\lambda_i \ln(r_o/r_m) + \lambda_o \ln(r_m/r_i)}}$$



講義資料にあるように，定常状態(フラックスが均一)では rの増加（面積の増加）に伴い勾配は減少する。上図の破線は熱伝導度が均質の場合で，内管と外管の熱伝導殿大小関係で，温度分布は図のように変化する

熱伝導度の差が数倍程度であれば，それ以上の考察はなかなか難しいが，両者が極端に異なっている（100倍程度以上）場合は，下の図にあるように，熱伝導度の小さい部分の熱伝導のみが全体を支配する。これが律速という概念であり，遅い速度の過程に全体が律速されているという。