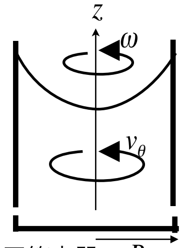
問題23　回転する円筒容器内の流れ



円筒容器

半径Rの円筒容器が角速度ωで回転していれば，側壁がRωの速度で動いているので，その側壁から運動量が内部に移動してゆく。つまり，速度分布が内部で現れる。流れは周方向のみで，軸対象となっている。さらに容器の底の影響がないという前提で，z方向にも変化がないと考える。

速度分布：運動の式，円筒容器．軸対象：円筒座標，θ成分

基礎方程式
$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_r v_\theta}{r}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}=\nu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}\right]-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial P}{\partial \theta}+\frac{F_\theta}{\rho}$$

簡単化　定常状態→ $\frac{\partial}{\partial t}=0$　軸対象→ $\frac{\partial}{\partial \theta}=0$　底の影響がない→ $\frac{\partial}{\partial z}=0$　外力なし→ $F_\theta=0$

流速はθ成分のみ→ $v_r=v_z=0$　軸対象なのでθ方向の圧力勾配はない→ $\frac{\partial P}{\partial \theta}=0$

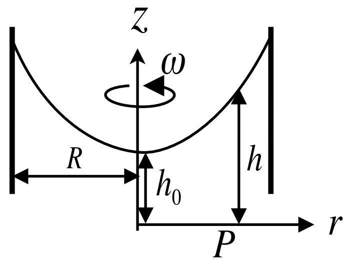
解くべき式　$\nu\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d(rv_\theta)}{dr}\right)=0$　境界条件　流体の存在する範囲は 0〜R であり，境界条件も 0 と R で与えるのが一般的　(粘着条件) $v_\theta=R\omega \quad at \quad r=R$ ①

もう１つの条件はr＝０でvθがどうなのかということだが，ここでは，結果を先取りして，有限（無限大に発散しない）を条件とする　$v_\theta=$ 有限 $at \quad r=0$ ②　実際には，r＝０ではなくて，０に漸近する（r→０）ということ

積分する　$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d(rv_\theta)}{dr}\right)=0 \rightarrow \frac{1}{r}\frac{d(rv_\theta)}{dr}=A \rightarrow \frac{d(rv_\theta)}{dr}=Ar$　境界条件②より $B=0$

さらに積分　$rv_\theta=\frac{A}{2}r^2+B \rightarrow v_\theta=\frac{A}{2}r+\frac{B}{r}$　境界条件①より $R\omega=\frac{A}{2}R \rightarrow A=2\omega$

$\xrightarrow{\text{最終的に}} v_\theta=\omega r$　定常状態では，容器内の液体は容器と全く同期して回転する。（固体円柱が回転していることと同じ）　この場合，r＝０は特異点となっている。



流体表面の盛り上がり形状については，圧力Pの半径方向の分布を考える。遠心力によって回転容器の壁付近の圧力が高くなる（rの増加に伴いPが大きくなる）液内部の圧力が高いということは，その上により多くの液体を支えることができるということ。すなわと，液高hと圧力Pは　ρgh＝P　の関係がある。
　そこで，圧力Pのr方向の分布を求めれば，液高，すなわち表面形状がわかる。Pとrの関係を知るための方程式は　∂P/∂rから始めれば良いので，今回の問題でその項があるのは，運動の式，円筒座標，r成分である。

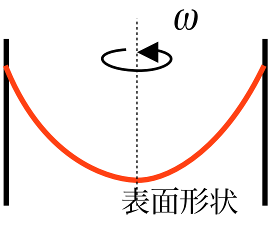
基礎方程式
$$\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta{}^2}{r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}=\nu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right]-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{F_r}{\rho}$$

簡単化　定常状態とかいろいろ考えられるが，ここでは何と言っても，方程式の変数 v_r そのものがゼロということでr方向の外力もないと考えれば，∂P/∂r=0となってしまうのではと思いながら，もう一度良く見ると，点線でかこった項が v_θ のみの項で，これが残る。

$-\frac{v_\theta^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}$　　$v_\theta=\omega r$　を代入して整理　$\frac{dP}{dr}=\rho\omega^2 r$　圧力Pの分布を求める方程式（解くべき式）

積分して，とりあえず
$P=P_0 \quad at \quad r=0$　として解を得る　$P=\frac{\rho\omega^2}{2}r^2+P_0$

$P=\rho g h$　より
$$h=\frac{\omega^2}{2g}r^2+\frac{P_0}{\rho g}=\frac{\omega^2}{2g}r^2+h_0$$



表面形状は放物線となる