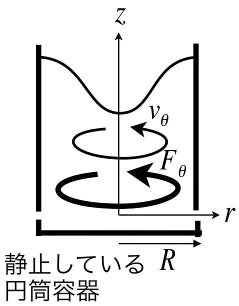
問題24　円筒容器内の強制対流



問題23と同様に基礎方程式と簡単化を行う。
23と異なる点

周方向に体積力が作用している。 $F_\theta = \alpha r$

簡単化して $\nu \dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{d(rv_\theta)}{dr}\right) + \dfrac{F_\theta}{\rho} = 0$ $\xrightarrow{\text{整理して}}$ 解くべき式： $\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{d(rv_\theta)}{dr}\right) = -\dfrac{\alpha}{\mu} r$

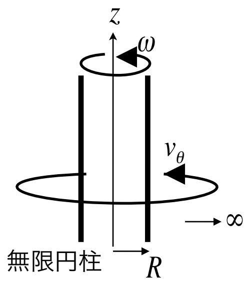
境界条件にも注意！
(粘着条件) $v_\theta = 0 \quad at \quad r = R$ ①
(発散しない) $v_\theta =$ 有限 $\quad at \quad r = 0$ ②

積分する $\dfrac{1}{r}\dfrac{d(rv_\theta)}{dr} = -\dfrac{\alpha}{2\mu} r^2 + A \longrightarrow \dfrac{d(rv_\theta)}{dr} = -\dfrac{\alpha}{2\mu} r^3 + Ar$

さらに積分 $rv_\theta = -\dfrac{\alpha}{8\mu} r^4 + \dfrac{A}{2} r^2 + B \longrightarrow v_\theta = -\dfrac{\alpha}{8\mu} r^3 + \dfrac{A}{2} r + \dfrac{B}{r}$ 　境界条件②より $B = 0$

境界条件①より $0 = -\dfrac{\alpha}{8\mu} R^3 + \dfrac{A}{2} R \rightarrow A = \dfrac{\alpha}{4\mu} R^2$ 　 $v_\theta = -\dfrac{\alpha}{8\mu} r^3 + \dfrac{\alpha R^2}{8\mu} r = \dfrac{\alpha}{8\mu} r(R^2 - r^2)$

問題25　回転無限円柱周りの流れ



固体の無限円柱（無限に長い）が無限に広がる液体の中で中心軸を中心として角速度ωで回転している。円柱表面の速度はRωで，接触する液体の速度はRωとなっている。また，無限に広がる無限遠では液体は静止していると考えることができる。無限長さの円柱なのでz方向には変化していない。速度はθ方向のみでその流速のr方向の分布を求める。

運動の式，円筒座標，θ成分

基礎方程式 $$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = \nu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rv_\theta)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}\right] - \frac{1}{\rho r}\frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{F_\theta}{\rho}$$

簡単化 定常状態→ $\dfrac{\partial}{\partial t} = 0$ 　軸対象→ $\dfrac{\partial}{\partial \theta} = 0$ 　底の影響がない→ $\dfrac{\partial}{\partial z} = 0$ 　外力なし→ $F_\theta = 0$

流速はθ成分のみ→ $v_r = v_z = 0$ 　軸対象なのでθ方向の圧力勾配はない→ $\dfrac{\partial P}{\partial \theta} = 0$

解くべき式 $\nu \dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{d(rv_\theta)}{dr}\right) = 0$

境界条件
流体の存在する範囲に注意！
流体はRから無限遠まで
(粘着条件) $v_\theta = R\omega \quad at \quad r = R$ ①
(無限遠) $v_\theta = 0 \quad at \quad r = \infty$ ②

積分する $\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{d(rv_\theta)}{dr}\right) = 0 \rightarrow \dfrac{1}{r}\dfrac{d(rv_\theta)}{dr} = A \rightarrow \dfrac{d(rv_\theta)}{dr} = Ar$ 　境界条件②より $A = 0$

さらに積分 $rv_\theta = \dfrac{A}{2} r^2 + B \rightarrow v_\theta = \dfrac{A}{2} r + \dfrac{B}{r}$ 　境界条件①より $R\omega = \dfrac{B}{R} \rightarrow B = R^2\omega$

$\xrightarrow{\text{最終的に}} v_\theta = \dfrac{R^2\omega}{r}$