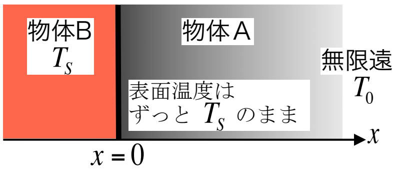
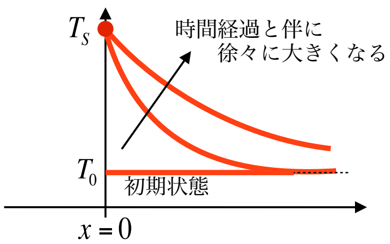
問題26　半無限体の非定常熱伝導（ラプラス変換を利用して解く）





半無限体の物体Aの端に温度Tsの物体Bが接触し，端部(x=0)の温度はt=0からすべての時間においてTsである。解くべき領域はx>0，すなわち半無限体Aの内部で，時間経過とともに温度分布が図のように変化する。

基礎方程式 $$\frac{\partial T}{\partial t}+v_x\frac{\partial T}{\partial x}+v_y\frac{\partial T}{\partial y}+v_z\frac{\partial T}{\partial z}=\alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)+\frac{Q}{\rho C_P}$$

これまでと同じように簡単化する（しかし，定常ではない）

- y，z方向に無限に広がっている平板なので，y，z方向に変化しない → $\frac{\partial}{\partial y}=0 \quad \frac{\partial}{\partial z}=0$
- 静止している固体の平板内は流速はない → $v_x=v_y=v_z=0$
- 問題で言及していないので発熱はない → $Q=0$

解くべき式は次のようになる

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

初期条件　最初はT_0で均一であったとする

境界条件　解くべき対象領域は 0 < x < ∞
その両端で条件を考える

初期条件 $T=T_0 \quad at \quad t=0$

境界条件① $T=T_S \quad at \quad x=0$

境界条件② $T=T_0 \quad at \quad x=\infty$

両辺を時間に関してラプラス変換する。 $\mathcal{L}\{T(x,t)\}=\hat{T}(x,s)$ 時間に着目しているので，xに関する部分にはラプラス変換は影響しない。

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}\right\}=\alpha\frac{\partial^2\mathcal{L}\{T(x,t)\}}{\partial x^2}\rightarrow s\hat{T}(x,s)-T(x,0)=\alpha\frac{d^2\hat{T}(x,s)}{dx^2}\rightarrow \boxed{s\hat{T}-T_0=\alpha\frac{d^2\hat{T}}{dx^2}}$$

ここで初期条件が反映される

(x,t)の変数のセットが(x,s)に変換されたということであるが，sの微分演算がないので，便宜的に常微分とする。

式を整理すると $$\frac{d^2\hat{T}}{dx^2}-\frac{s}{\alpha}\hat{T}=-\frac{T_0}{\alpha}$$ 非斉次(同次)となっている

右辺が０でない非斉次(同次)微分方程式の解は，右辺を０とした斉次(同次)微分方程式の解に特殊解を足した形にすれば良い

斉次(同次)方程式 $$\frac{d^2\hat{T}}{dx^2}-\frac{s}{\alpha}\hat{T}=0$$

境界条件もラプラス変換する

境界条件① $\hat{T}=T_S/s \quad at \quad x=0$

境界条件② $\hat{T}=T_0/s \quad at \quad x=\infty$

斉次(同次)方程式の解（基本解）

$$\hat{T}=Ae^{\sqrt{\frac{s}{\alpha}}x}+Be^{-\sqrt{\frac{s}{\alpha}}x}$$

基本解に特殊解P（この場合は定数でPとおく）を足して非斉次(非同次)方程式を満足するように定数Pを決定する。

$$\hat{T}=Ae^{\sqrt{\frac{s}{\alpha}}x}+Be^{-\sqrt{\frac{s}{\alpha}}x}+P$$

斉次(同次)方程式に代入

$$\underline{\frac{d^2}{dx^2}\left(Ae^{\sqrt{\frac{s}{\alpha}}x}+Be^{-\sqrt{\frac{s}{\alpha}}x}+P\right)-\frac{s}{\alpha}\left(Ae^{\sqrt{\frac{s}{\alpha}}x}+Be^{-\sqrt{\frac{s}{\alpha}}x}+P\right)}=-\frac{T_0}{\alpha}$$

Pは定数なのでこの下線部は同次方程式と同じであり０となる。

$$\frac{s}{\alpha}P=\frac{T_0}{\alpha}$$ より $$P=\frac{T_0}{s}$$

よって解は $$\hat{T}=Ae^{\sqrt{\frac{s}{\alpha}}x}+Be^{-\sqrt{\frac{s}{\alpha}}x}+\frac{T_0}{s}$$ となる。（A，Bは定数）

境界条件②より $A=0$　x=∞で有限の値であるということは，発散する項は存在してならないことを意味する

境界条件①より $$\frac{T_S}{s}=B+\frac{T_0}{s}\rightarrow B=\frac{T_S-T_0}{s}$$

よってラプラス空間での解は

$$\hat{T}=\left(\frac{T_S-T_0}{s}\right)e^{-\sqrt{\frac{s}{\alpha}}x}+\frac{T_0}{s}$$ と決定できた

ラプラス逆変換して実空間の解を求める。

線形性があるので項別に逆変換 $$\mathcal{L}^{-1}\{\hat{T}\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{T_S-T_0}{s}\right)e^{-\sqrt{\frac{s}{\alpha}}x}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{T_0}{s}\right\}$$

さらに線形性を利用して $$T=(T_S-T_0)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\sqrt{\frac{s}{\alpha}}x}}{s}\right\}+T_0$$

数学の勉強を参照して

$$\frac{e^{-2a\sqrt{s}}}{s}\xrightarrow{\text{逆変換}}\mathrm{erfc}\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)$$ で $$a=\frac{x}{2\sqrt{\alpha}}$$ と考えると

$$T=(T_S-T_0)\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)+T_0$$

整理して

$$\boxed{\frac{T-T_0}{T_S-T_0}=\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)}$$