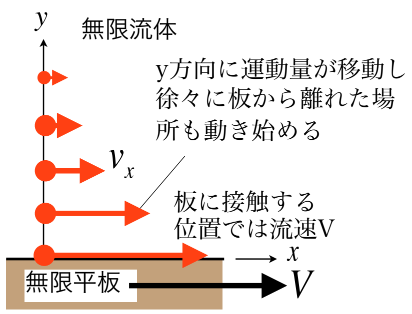
問題28　変数合成法

基礎方程式
$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} = \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{F_x}{\rho}$$



この無限平板が突然速度Vで動き出す。
その後一定の速度Vで動き続ける。

無限流体中の無限平板がx方向に動いているのだから　$v_y = v_z = 0$　　$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$

この流体が動いているのは平板表面からの粘性による圧力勾配とか外力は考えていないので　$\frac{\partial P}{\partial x} = 0$　　$F_x = 0$

よって，解くべき式は　$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$

初期条件　$v_x = 0 \quad at \quad t = 0$

境界条件　$v_x = V \quad at \quad y = 0$
$v_x = 0 \quad at \quad y = \infty$

この方程式はこのままでは解けない。なんとか常微分方程式に持ち込みたい。変数が２つあるから偏微分になる訳で，２つの変数を組み合わせて１つにしたら良いのではないか？　しかしどのような合成変数が良いのか？　$\eta = y\sqrt{t}$ とかで良いのか？　これではダメだな・・・　とか考えるよりも，ラプラス変換法で解を既に求めていたのでは？　ということでラプラス変換法での解を利用する。

$$\frac{v_x}{V} = \mathrm{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right)$$

この解の関数：余語差関数のArgumentは　$\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}$　でこれを合成変数とすればいいのでは

合成変数 η を $\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}$ とし，求めるべき解もラプラス変換法の解からヒントを得て，$\frac{v_x}{V} = \phi(\eta)$ とする。

与えられた方程式から $\phi(\eta)$ に関する常微分方程式と境界条件を導き，それを解いて，最終的に元に戻せば解にたどり着く。　$v_x = V\phi(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}})$

ϕ は erfc では?　ということだが，ここではあくまでも変数合成法での解き方で求める。

まず与えられた方程式に $v_x = V\phi(\eta)$ を代入する。$\phi(\eta)$ の微分は ϕ をまず η で常微分して，η の偏微分を乗じる

左辺　$\frac{\partial v_x}{\partial t} = V\frac{d\phi}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial t} = V\phi'\left(-\frac{y}{4t\sqrt{\nu t}}\right) = -V\phi'\eta\frac{1}{2t}$

ここで簡単のために　$\frac{d\phi}{d\eta} = \phi'$　と表記する。

右辺（まず１階微分）$\frac{\partial v_x}{\partial y} = V\frac{d\phi}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = V\phi'\frac{1}{2\sqrt{\nu t}}$　（２階微分）も同様に考えて　$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = V\phi''\frac{1}{4\nu t}$

初期条件と境界条件も合成され２つになっている。

与式に代入　$-V\phi'\eta\frac{1}{2t} = \nu V\phi''\frac{1}{4\nu t} \rightarrow \phi'' = -2\eta\phi'$

ここにきて，ϕ と η の方程式になっていることがわかる。これを解けばよい

境界条件　$\phi = 1 \quad at \quad \eta = 0$
$\phi = 0 \quad at \quad \eta = \infty$

$$\phi'' = \frac{d\phi'}{d\eta} \text{ より } \frac{d\phi'}{\phi'} = -2\eta d\eta \rightarrow d\ln\phi' = -2\eta d\eta \xrightarrow{\text{積分}} \ln\phi' = -\eta^2 + A' \xrightarrow{\text{整理して}} \phi' = Ae^{-\eta^2}$$

$e^{-\eta^2}$ の積分は explicit には求められないので解を　$\phi = A\int e^{-\eta^2}d\eta + B$　とする。

このままでは境界条件を利用できないので $e^{-\eta^2}$ を積分した原始関数を $E(\eta)$ とする。
$\eta = 0$ の境界条件が設定されているので，$\phi = A\{E(\eta) - E(0)\} + B$　として　$\phi(\eta) = A\int_0^\eta e^{-\eta'^2}d\eta' + B$

$$\phi = 1 \quad at \quad \eta = 0 \text{ より } 1 = A\int_0^0 e^{-\eta'^2}d\eta' + B = B \rightarrow \phi(\eta) = A\int_0^\eta e^{-\eta'^2}d\eta' + 1$$

$$\phi = 0 \quad at \quad \eta = \infty \text{ より } 0 = A\int_0^\infty e^{-\eta'^2}d\eta' + 1 = A\frac{\sqrt{\pi}}{2} + 1 \rightarrow A = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

最終的に
$$\phi(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\eta e^{-\eta'^2}d\eta' \longrightarrow \phi(\eta) = \mathrm{erfc}(\eta)$$

変数を元に戻して
$$\frac{v_x}{V} = \mathrm{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right)$$

$$\mathrm{erfc}(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\eta e^{-\eta'^2}d\eta'$$