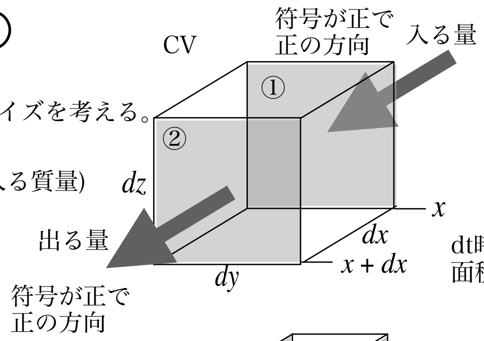
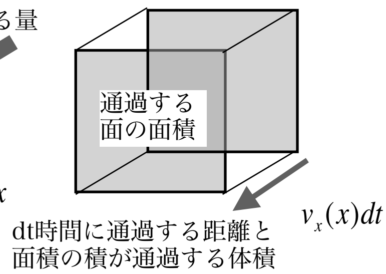
メールアドレス：kozka@kumamoto-u.ac.jp
ＨＰアドレス　：http://www.msre.kumamoto-u.ac.jp/~process/Transport/home.html

基礎方程式の導出１（微分収支と座標系，連続の式）

収支式の考え方

直角座標—右に示すサイコロの形，しかし微小サイズを考える。
このサイコロをControl Volumeという。





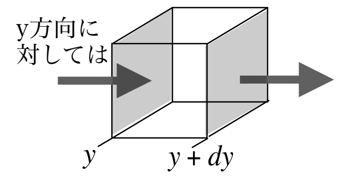
xの面①を通ってdt時間にCVに入る量(ここでは入る質量)

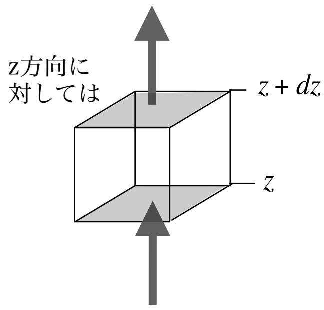
$\rho(x)v_x(x)dt\,dydz$

- xの面①を通過する体積 $v_x(x)dt\times dy\times dz$
- xの面①を通過する質量 $\rho(x)\times v_x(x)dtdydz$

x+dxの面②を通ってdt時間にCVから出る量(出る質量)

$\rho(x+dx)v_x(x+dx)dt\,dydz$





収支式 (dt時間経過する前後でのCV内の物理量の増減を考える)

(入る量) ー (出る量) ＝ (蓄積)

(accumulation)

t=t	(input)	(output)	t=t+dt
(最初にあった量) ＋	(入る量) ー	(出る量) ＝	(dt時間経過後の量)

質量に対して収支を考える

CVの体積： $dxdydz$
CV内の質量＝密度×体積
ρ, v は時間と位置の関数

x方向： $\rho(t)dxdydz \;+\; \rho(x)v_x(x)dtdydz \;-\; \rho(x+dx)v_x(x+dx)dtdydz \;=\; \rho(t+dt)dxdydz$

最初にあった質量　dt時間で入る質量　dt時間で出る質量　dt時間経過後の質量

Taylor展開　$\rho(x+dx)=\rho(x)+\dfrac{\partial\rho(x)}{\partial x}dx$　　$v_x(x+dx)=v_x(x)+\dfrac{\partial v_x(x)}{\partial x}dx$　　$\rho(t+dt)=\rho(t)+\dfrac{\partial\rho(t)}{\partial t}dt$

$v_x(x)$ の場合は x に関しての変化

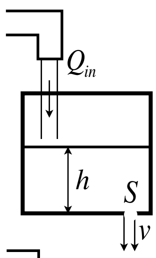
y方向，z方向に対しても同様に展開し，整理する。 ➔ $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=-\dfrac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}-\dfrac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}-\dfrac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}$ —— **これを連続の式という**

何もない空間で物質が消滅したり，出現したりしない

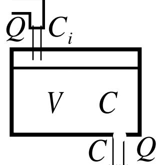
密度が位置的にも，時間的にも変化しない ➔ $\dfrac{\partial v_x}{\partial x}+\dfrac{\partial v_y}{\partial y}+\dfrac{\partial v_z}{\partial z}=0$ ⟶ ベクトルで表現 $\nabla\bullet\boldsymbol{V}=0$　$\mathrm{div}\boldsymbol{V}=0$

問題９ 円筒座標に対して連続の式を導出しなさい。（ρが変化する場合と一定の場合の両方とも）

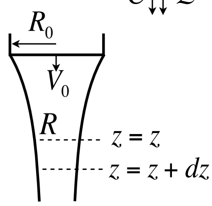
問題10 球座標に対して連続の式を導出しなさい。（ρが変化する場合と一定の場合の両方とも）



問題11 大きな水槽(断面積A)に一定の量(流入流量はQ_{in}(m³/s)で一定)で水を入れた。しかし，水槽の底に穴（面積S(m²)）があいていて，水深h(m) に比例する流出速度(v=αh)で漏れている．水深hの変化(時間に対してどのように変化するか)を導出しなさい。さらに，水槽が一辺1.2mの立方体の形状で，底の穴の面積が S=3cm²，α=1760 (1/s)とした時に、水が上からあふれない最大の流量Q_{cr}を求めなさい



問題12 水槽に一定の量Q(ℓ/s) で水が入り，同じ水量で出ている。入る水には一定の濃度C_i(g/ℓ) でインクが混入している。インクは水槽内で素早く広がり，常に均一の濃度C(g/ℓ) になっていると考えよう。水槽内の水の体積をV(ℓ)として，水槽内にインクを入れ始めてからの濃度Cの変化を示す式を導出しなさい。さらに，C_i=0.55 g/ℓ, V=110ℓ, Q=0.15ℓ/s として，水槽内の濃度Cが 0.30 g/ℓ になるまでの時間を計算しなさい。



問題13 右図のように半径R_0の円管から液体が流れている。円管出口では流速がV_0であり，重力によって下方に垂れるにつれて(zが増加するにつれて)流速は次式で示されるように増加する。
図に示す微小区間で液体の体積収支を考えることによって，液体の半径Rを zの関数として導出して下さい。また，連続の式を適用することで，半径方向の流速をr，zの関数として導出して下さい。

$v=\sqrt{2gz+V_0^2}$

g：重力加速度

問題14 一定の断面積を持つ円管内部に抽出物質を含む粒子が充填されている。水が一定の流速Vで粒子の隙間を流れてゆく間に抽出物質が水にとけ込み，その濃度が増加します。入り口を x=0 としてx方向の抽出成分の濃度分布を導出して下さい。微小領域dxにおける粒子からの抽出速度は下式とします。ただし，粒子の形状等は考える必要はなく，濃度はxのみに依存し，抽出物質がとけ込んでも，水の体積は変化しないとします。さらに，濃度分布は時間に依存しない定常状態であるとします。

$n=kRA(C_e-C)dx$　　n：抽出速度(mol/s)

k：速度定数(m/s)　　A：円管断面積(m²)

C_e：抽出平衡濃度(mol/m³)　　R：比表面積(1/m)