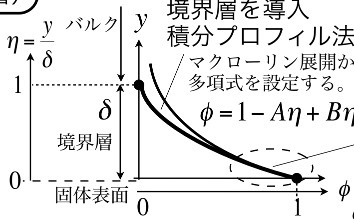
メールアドレス：kozka@kumamoto-u.ac.jp
ＨＰアドレス　：http//www.msre.kumamoto-u.ac.jp/~process/ Transport/home.html

境界層問題１（平板周りの境界層）

前回のまとめ

解析解　$\dfrac{v_x}{V} = \phi = \mathrm{erfc}\left(\dfrac{y}{2\sqrt{\nu t}}\right)$

突然動き出す無限平板は解析解がわかっている。それを用いて，境界層を設定する。



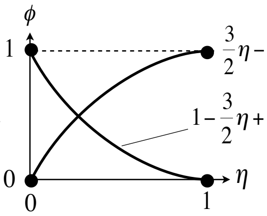
ϕ =(部分)/(全体)

多項式の係数は教科書的には

$\eta = 1$ で $d\phi/d\eta = 0$

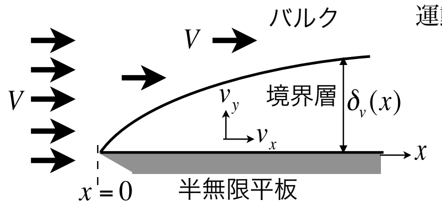
$\longrightarrow\ \phi = 1 - \dfrac{3}{2}\eta + \dfrac{1}{2}\eta^3$

しかし，本講義ではより本質を追究し，固体表面でのフラックス（傾き）を一致させる。



教科書通りだが，近似であることを認識する

境界層問題２（静止している半無限平板まわりの境界層）



運動の式，直角座標， x 成分

定常 $\dfrac{\partial}{\partial t} = 0$． 半無限 $\dfrac{\partial}{\partial z} = 0$， 外力なし $F_x = 0$

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}$$

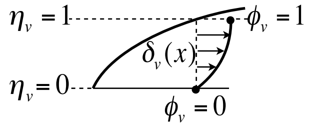
バルクが一方の境界条件を与える→圧力勾配を考慮しない

運動量の移動はy方向が支配的→x方向の粘性力による流束を無視

$$\boxed{v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}}$$

積分プロフィル法

プロフィールの決定
ϕ の変化が０→１　$\phi_v = \dfrac{3}{2}\eta_v - \dfrac{1}{2}\eta_v^{\ 3}$　　$\phi_v = \dfrac{v_x}{V}$　　$\eta_v = \dfrac{y}{\delta_v}$



定常であるがδがｘの関数となっている

連続の式
$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

境界層は薄いので

各微分項の書下し　$v_x = V\phi_v$　　$\dfrac{\partial v_x}{\partial x} = V\phi_v'\left(-\dfrac{\eta_v}{\delta_v}\right)\dfrac{d\delta_v}{dx}$　　$\dfrac{\partial v_x}{\partial y} = \dfrac{V\phi_v'}{\delta_v}$　　$\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \dfrac{V\phi_v''}{\delta_v^{\ 2}}$　　$v_y = V\dfrac{d\delta_v}{dx}\displaystyle\int_0^{\eta_v}\eta_v\phi_v' d\eta_v \leftarrow v_y = -\int_0^y \frac{\partial v_x}{\partial x}dy$

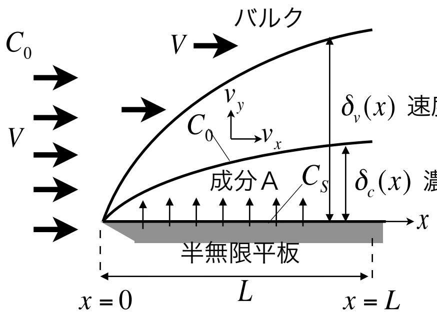
元の方程式に代入

$$V^2\left(-\frac{1}{\delta_v}\frac{d\delta_v}{dx}\right)\eta_v\phi_v\phi_v' + V^2\left(\frac{1}{\delta_v}\frac{d\delta_v}{dx}\right)\phi_v'\int_0^{\eta_v}\hat{\eta}_v\phi_v' d\hat{\eta}_v = \nu\frac{V}{\delta_v^{\ 2}}\phi_v'' \longrightarrow \left(-\eta_v\phi_v\phi_v' + \phi_v'\int_0^{\eta_v}\hat{\eta}_v\phi_v' d\hat{\eta}_v\right)(\delta_v d\delta_v) = \phi_v''\frac{\nu}{V}dx$$

境界層にわたり定積分　$(B - A)(\delta_v d\delta_v) = C\dfrac{\nu}{V}dx$　　$A = \displaystyle\int_0^1 \eta_v\phi_v\phi_v' d\eta_v = \frac{9}{35}$　　$B = \displaystyle\int_0^1\left(\phi_v'\int_0^{\eta_v}\hat{\eta}_v\phi_v' d\hat{\eta}_v\right)d\eta_v = \frac{33}{280}$　　$C = \displaystyle\int_0^1 \phi_v'' d\eta_v = -\frac{3}{2}$　定積分なのでこれらは定数

積分して
$\delta_v^{\ 2} = \dfrac{2C}{B - A}\dfrac{\nu x}{V}$　　$\delta_v = \sqrt{\dfrac{2C}{B - A}}\sqrt{\dfrac{\nu x}{V}} = \sqrt{\dfrac{280}{13}}\sqrt{\dfrac{\nu x}{V}}$　　$\boxed{\dfrac{\delta_v}{x} = 4.64 Re_x^{-1/2}\quad Re_x = \dfrac{Vx}{\nu}}$　　$Re = \dfrac{\rho VL}{\mu} = \dfrac{VL}{\nu}$　　$\boxed{Re：レイノルズ数= \dfrac{(慣性力)}{(粘性力)}}$

境界層問題３（静止している半無限平板まわりの流動を伴う物質移動，速度境界層と濃度境界層）

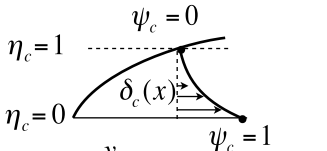


速度境界層，濃度境界層の両方にプロフィル法を適用

$$\boxed{\begin{aligned} v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} &= \nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ v_x\frac{\partial C}{\partial x} + v_y\frac{\partial C}{\partial y} &= D\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \end{aligned}}$$

$\phi_v = \dfrac{3}{2}\eta_v - \dfrac{1}{2}\eta_v^{\ 3}$

$\psi_c = 1 - \dfrac{3}{2}\eta_c + \dfrac{1}{2}\eta_c^{\ 3}$



$\eta_c = \dfrac{y}{\delta_c}$　　$\psi_c = \dfrac{C - C_0}{C_s - C_0}$

速度境界層については上述の解と同様

濃度境界層についても同様に積分プロフィル法を適用

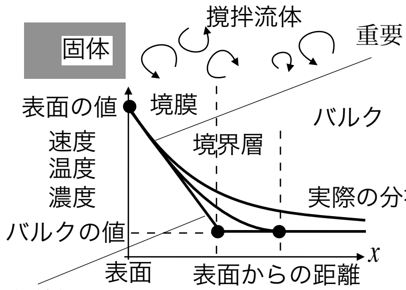
さらに速度境界層と濃度境界層が相似形であると考えて　$\delta_c = \Delta\delta_v$

式を整理する
$(Q - P)(\delta_c d\delta_c) = R\dfrac{D}{V}dx$　　プロフィールの係数から計算して　$P = \dfrac{3}{70}\Delta^3 - \dfrac{3}{10}\Delta$　　$Q = \dfrac{9}{280}\Delta^3 - \dfrac{3}{20}\Delta$　　$R = \dfrac{3}{2}$　　$\delta_c = \sqrt{\dfrac{20}{\Delta - \Delta^3/14}}\sqrt{\dfrac{Dx}{V}}$

境界層厚さの比より　$\Delta^3 - \dfrac{\Delta^5}{14} = \dfrac{13}{14}\dfrac{1}{Sc}$　　$\Delta \to 0$ で $\Delta \approx Sc^{-1/3}$　　$\boxed{Sc：シュミット数= \dfrac{(動粘度)}{(拡散係数)}\quad Sc = \dfrac{\nu}{D}}$ $\longrightarrow$ $\boxed{\dfrac{\delta_c}{x} = 4.64 Re_x^{-1/2} Sc^{-1/3}}$

境膜の導入

境界層は複雑な形状に対して，速度と温度，速度と濃度などの連成問題を解くことにおいて非常に有用であるが，計算が複雑である。より，使い勝手のよい方法が境膜であり，これを導入することで複雑な形状に対する問題を簡単に解くことができる。



境膜内は定常という前提があり，境膜内は直線分布となる。

重要な条件！！　表面でのフラックス（傾き）が一致する
プロフィール関数の濃度分布の表面の傾きより

$\dfrac{\partial C}{\partial y} = \dfrac{(C_s - C_0)\psi'}{\delta_c} \longrightarrow \delta = \dfrac{2}{3}\delta_c$　　δ：境膜厚さ

表面でのフラックスを評価して　$N = \dfrac{D}{\delta}(C_S - C_0) = k_d(C_S - C_0)$　㋐

k_d：物質移動速度定数(m/s)

$Sh_x = \dfrac{k_{dx}x}{D}$ として

$\boxed{Sh：シャーウッド数= \dfrac{(撹拌流体中)}{(静止流体中)}}$

㋑ $Sh_x = 0.331 Re_x^{1/2} Sc^{1/3}$

㋒ $Sh = 0.662 Re^{1/2} Sc^{1/3}$

$Sh = \dfrac{k_d L}{D}$　　$Re = \dfrac{VL}{\nu}$　　$Sc = \dfrac{\nu}{D}$

問題32　境膜と境膜内物質移動速度定数 k_d（㋐で定義される）を導入して㋑，㋒を導出して下さい。